[illegible]
Elementaral-
gebra.

Math. P.
30

Math. P. 70

Mathesis. Algebra generalis
231.

Die

Elementaralgebra

eine

Ergänzung der Arithmetik des seel. Ernesti

Aus den

Werken vortreflicher Algebraiker

zum Gebrauche

für

Gymnasien und Schulen

aufgestellt

von

Joh. Andr. Benign. Bergsträßer

Fürstl. Hessischem Konsistorialrathe und der Philosophie ordentlichem Professor zu Hanau.

Frankfurt am Main,

bei Philipp Wilhelm Eichenberg,

1789.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Dem

Durchlauchtigsten Prinzen

und Herrn

H e r r n

Ernst Konstantin

Prinzen zu Hessenphilippsthal

Dem

Hochgebohrnen Reichsgrafen

und Herrn

H e r r n

Georg Wilhelm Ludwig

Grafen zu Löwenstein

Dem

Herrn Baron

Heinrich Otto

von der Malsburg

ehrerbietigst

und

mit den wärmsten Wünschen

für

Ihre gute Zukunft

gewidmet

von

dem Herausgeber.

Dieser Beitrag zur Arithmetik des seel. Ernesti, ist so wenig ein Eigenthum von mir, daß ich es vielmehr ganz aus den Werken eines Stritter, Kästner, Klemm, Krebs, Reccard, Sauri, Bossút, de la Caille und Clairaut genommen habe: ja ich habe mich sogar der eignen Worte jener teutschen Männer bedient, wo es geschehen konnte, ohne sie jedesmal besonders zu nennen. Es hieng also nur die Anordnung für den Schulvortrag von mir ab, und diese hoffe ich so getroffen zu haben, daß der junge Mathematiker mein Büchelchen mit grosem Vortheil schon für sich selbst studiren kan; wenigstens spricht der Versuch für meinen Glauben, den ich seit einem Monat an acht und zwan-

zig Scholaren von sechserlei Nationen mit gutem Erfolge gemacht habe.

Ueber die Art und Weise, wie die reine Mathematik nach dem seel. Ernesti auf unserm Lyceum vorgetragen wird, will ich mich in meiner Elementargeometrie näher erklären, welche in der nächsten Leipziger Messe erscheinen soll.

Es wird mich freuen, wenn andere Lehrer an Gymnasien und Schulen die Anordnung der Methode, die ich gewählt habe, nützlich finden, und billigen.

Einige Druckfehler kann der Leser in den Zeichen leicht entdecken, wenn er sie mit den Regeln vergleicht; z. B. S. 19, wo in der vierten Zeile — a vorkommen sollte. Seite 40 lese man oben: (a+b) . (a+b), oder (a—b) . (a—b).

Hanau, den 4ten März 1789.

Der Herausgeber.

Alge=

Algebra.

§. 1.

Die Algebra ist im eigentlichen Verstande eine Wissenschaft von unbestimmten Grösen, d. i. eine Methode, alle mögliche Grösen, nach allgemeinen Zeichen, die sie vorstellen sollen, zu berechnen. Man nennt sie auch die Buchstabenrechnung, um sie von der Analysis, oder der Algebra im engern Verstande, zu unterscheiden. Sie lehret also, wie man durch Rechnungen mit Buchstaben aus den gegebenen Umständen eine verlangte Zahl, oder Gröse finden soll.

Erläuterungen.

§. 2.

Es lassen sich Grösen und Zahlen durch allgemeine willkührliche Zeichen, und zwar auf die vortheilhafte Weise ausdrücken, daß sie nicht immer einerlei Zahlen, sondern bald diese,

bald jene bedeuten. Folglich erhalten diese Zeichen ihren Werth nicht aus der Stelle, wo sie stehen.

§. 3.

Gemeiniglich bedient man sich zu diesen allgemeinen Zeichen der Gröse, oder der Zahlen, der kleinen lateinischen Buchstaben. Dies ist der Grund, warum die Algebra Buchstabenrechnung heißt, wenn man Grösen, oder Zahlen durch diese unbestimmten Zeichen ausdrückt, und berechnet.

§. 4.

Außer dem lateinischen Alphabethe giebt es aber auch noch andere allgemeine Zeichen, deren man sich in der Algebra bedient, z. B. der gewöhnlichen Zeichen der vier Species (Arithm. §. 9. Erl. 2.) und anderer. Es sei z. B. 20 = a und 7 = b, so ist 27 = a + b; oder es sei 19 = c und 3 = x, so ist 16 = c — x u. s. w. Und warum dann dieses? Blos deswegen, weil die Buchstaben nicht wie die Ziffern aus den Stellen ihren Werth erhalten.

§. 5.

Diese Art die Zahlen auszudrücken und mit denselben zu rechnen, behagt gewöhnlich den Anfängern in der Mathematik nicht. Sie sehen sie für sonderbar und schwer an, oder glauben, daß sie keinen Nuzen hätte. Aber

sie

sie werden sich, wenn sie Kopf mitbringen, und die Hand anlegen, bald davon überzeugen, daß diese Art zu rechnen weit bequemer und leichter, als die Rechnung mit den Zahlen ist. Sie überladet das Gedächtniß und die Einbildungskraft nicht, und vermindert nicht wenig die Mühe, die sie sich sonst geben müßten, wenn sie das Nöthige bei der Entdeckung einer Wahrheit, an der man arbeitet, behalten, und so oft man es brauchte, wieder hervor holen sollten. Die Buchstaben, deren man sich in der Algebra bedient, stellen eine jede Grösse im Allgemeinen vor; also auch Linien, oder Zahlen, je nachdem die Aufgabe entweder eine arithmetische, oder geometrische ist. Sie liefern uns, in der Verbindung unter einander, Produkte, Flächen, Körper und erhöhte Potenzen. So stellen z. B. in der Geometrie zwei Bustaben = ab ein Rechteck vor, dessen Seiten ausgedrückt sind, die eine im Buchstaben a, die andere im Buchstaben b, die miteinander multiplicirt, die Fläche ab zum Produkte bringen. Wird ein und ebenderselbe Buchstab wiederholt = aa so bedeutet er ein Quadrat; drei Buchstaben abc stellen ein rechtwinklichtes Parallelepipedum vor, die Länge in a, die Breite in b und die Tiefe in c, so daß sie durch ihre Multiplikation unter einander den Körper abc erzeugen.

Entgegengesezte Grösen.

§. 6.

Das Erste und Allerwichtigste in der Algebra, worauf der Anfänger zu merken hat, ist der Begrif von entgegengesezten Grösen, das ist, von positiven und negativen, oder von bejahenden und verneinenden. Denn ohne deutliche Uebersicht dieses Begriffes kan man die Regel, mit Zeichen und Buchstaben zu kalkuliren, nie gründlich verstehen, und noch viel weniger anwenden. Grösen heißen aber alsdann entgegengesezte, wenn sie sich einander vermindern, das ist, entweder ganz, oder zum Theil aufheben, so bald sie in einem gewissen Verhältnisse gegen einander betrachtet werden. Vermögen und Schulden, Schritte vor- und rückwärts sind entgegengesezte Grösen. Eine von diesen Grösen, welche man will, pflegt man bejahend, oder positiv, und alsdann die andere, blos um des Gegensazes willen, verneinend, oder negativ zu nennen. Beide sind, unter welchem Falle man sie sich auch denkt, wirkliche Grösen; nicht eingebildete. Denn so ist ja, ohne alle Beiwirkung der Einbildung, beides Vermögen eine negative Schuld, und Schulden ein negatives Vermögen. Entgegengesezte, d. i. positive und negative Grösen, kan man indessen immer, als solche Grösen ansehen, die von einander abgezogen werden sollen. Es läßt sich also auch die eine bequem mit +, und die andere mit — bemerken. Die,

Die, welche das Zeichen + bekommt, heißt alsdann die positive, und die andere, welche das Zeichen — hat, die negative.

Erläuterungen.

§. 7.

1. Lassen Sie uns annehmen, es habe jemand 1000 Rthlr. Vermögen, oder Schulden, so drücken wir die eine Gröse, wie die andere aus, durch einerlei Symbole in 1000 Rthlr. Eben so läßt sich im Allgemeinen, da wo wir ein Vermögen, oder eine Schuld unbestimmt angeben wollen, der Buchstab a gebrauchen. Allein da Vermögen und Schuld allemal Grösen sind; Grösen, die sich nicht auf einerlei Art auf einen Menschen beziehen, da es sich ferner begeben kan, daß sie sich in Rechnungen untereinander mischen, so war es auch nöthig, daß man sie durch eigne Zeichen unterschied. Diese Zeichen sind + und —. Will man daher algebraisch angeben, daß jemand ein Vermögen, ausgedrückt durch a, hat, so schreibt man + a; ist man aber Willens zu sagen, er habe eine Schuld, ausgedrückt durch b, so bezeichnet man seinen Zustand durch + a — b; jedoch mit dem Unterschiede, daß man das Zeichen + vor dem Anfange eines algebraischen Sazes nicht hinschreibt, sondern in Gedanken voraussezt. Man schreibt also für + a — b richtiger a — b.

2. Negative Grösen sind also wirkliche und wahrhafte Grösen. Mithin gehört auch der Ausdruck, weniger, als nichts, keineswegs hieher; wenigstens ohne eine vorgängige Erklärung nicht, und selbst auf diesen Fall dürfte kein absolutes Nichts, sondern ein respektives gedacht und unterstellt werden. Man kan die Sache mit Beispielen deutlich machen. Wenn man z. B. den Zustand, wo man weder vor sich, noch rückwärts geht, ein Nichts heißt: so wäre Rückwärtsgehen weniger, als Nichts; vorausgesezt, daß man Vorwärtsgehen etwas Positives nennt. Nimmt man z. B. eine Bewegung von Morgen gegen Abend, als etwas Positives an: so muß die Bewegung von Abend gegen Morgen, da sie der ersten entgegengesezt ist, als etwas Negatives im Kalkulus bezeichnet werden. Betrachtet man die Elevationen der Sonne über dem Horizont, als positive Grösen, so müßten die Erniedrigungen der Sonne, oder ihr Untergehen unter den Gesichtskreis, als eine negative Gröse angesehen werden. Das Nämliche findet aber bei allen andern Grösen statt, die nicht anders, als unter wechselseitigen Beziehungen vorhanden, oder wirklich sein können. In den geometrischen Wissenschaften wird dieses weiter erläutert. Die Sinus zwischen 180° und 360° Graden sind negativ, ohngeachtet sie wirkliche Linien sind; Linien, welche mit den entgegengesezten positiven Sinussen einerlei Gröse haben. Die **Kosinus** über 90° sind negativ u. s. w. Oder Linien

Linien des Diameters vom Mittelpunkte gegen die rechte Hand genommen sind positiv; gegen die linke negativ, oder umgekehrt. Es sind aber alle wirkliche Grösen.

Erklärungen und Unterstellungen.

§. 8.

Hat eine Gröse gar kein Zeichen vor sich, weder + noch —, so denkt man sie sich allezeit in der Verbindung mit + (§. 7. Erl. 1). So ist a + b — c = + a + b — c.

§. 9.

Einfache oder inkomplexe Grösen sind diejenigen, welche, außer + oder —, weiter kein Zeichen bei sich haben. Z. B. ab und — cd.

§. 10.

Zusammengesezte, oder komplexe Grösen sind, welche mehrere Ausdrücke, oder Terminos in der Verbindung mit +, oder in der Absonderung mit — haben. So sind a + b, c — c zusammengesezte Grösen.

§. 11.

Die einfache Gröse nennt man eine monomische, und eine jede andere zusammengesezte eine polynomische. Hat eine polynomische nur zwei Ausdrücke, so bekommt sie den Namen der binomischen; tri- oder quadrinomisch wird sie im ersten Falle durch drei; im andern

durch vier Ausdrücke. Z. B. a ist eine monomische Gröse; a — b eine binomische; a + b — c eine trinomische; ab — c — d + ff eine quadrinomische.

§. 12.

Eine jede algebraische Gröse, die keine Wurzelzeichen bei sich hat, wird eine rationale Gröse genannt; irrational sind also diejenigen, die ein solches Zeichen bei sich haben. Z. B. a — b ist eine rationale Gröse, √ c — d eine irrationale.

§. 13.

Ziffern, die vor einem algebraischen Ausdrucke vorhergehen, heißen Koefficienten. Z. B. 3ab + 4cd ist eine zusammengesezte Gröse von zweien Ausdrücken, wovon der erste die Ziffer 3 und der andere die Ziffer 4 zum Koefficienten hat.

§. 14.

Jede algebraische Gröse, vor welcher keine Ziffer vorhergeht, hat 1 zum Koefficienten. So ist ab = 1ab.

§. 15.

Exponent wird eine Ziffer genannt, wenn sie oben hinter einem Buchstaben steht. So ist von a^2 die Ziffer 2 der Exponent. 3 ist der Exponent von der Gröse a^3.

§. 16.

§. 16.

Grösen, bei welchen kein Exponent ausdrücklich steht, haben 1 zum Exponenten. So ist $a = a^1$; $bc = bc^1$.

§. 17.

Man verwechsle die Exponenten und Koefficienten nicht untereinander. Die ersten sind Zeichen der Multiplikation; die lezten der Addition. Gesezt $a = 10$, so ist $a^2 = 100$, und $2a = 20$. Denn $a^2 = a \times a$, d. i. $a^2 = 10 \times 10 = 100$. Aber $2a = a + a$, d. i. $2a = 10 + 10 = 20$.

Reduktion.

§. 18.

Die algebraische Reduktion unterscheidet sich von der arithmetischen in Zahlen. Bei der lezten verändern die Zahlen ihre Art und ihren Namen; in der ersten werden die Grösen, ohne daß sie die Art verändern, klarer und kürzer, als vorher ausgedrückt. Eine zurückgeführte, oder reducirte Gröse muß die mögliche Präcision, die sie annehmen kan, wirklich darstellen, wenn die Buchstaben, die sie andeuten, nach der Ordnung des Alphabeths folgen, und wenn die zusammengesezten Ausdrücke mit einerlei Buchstaben entweder mit einem gleichförmigen Ausdrucke verbunden, oder ganz weggeschaft werden. Man verbin-

det sie mit einem Ausdrucke, wenn sie einerlei Zeichen vor sich haben, und schaft sie ganz, oder zum Theil weg, wenn verschiedne Zeichen vor denselben vorhergehen.

Erläuterung.

Durch die Reduktion entladet man so zu reden eine algebraische Aufgabe von allen überflüßigen Buchstaben und Zeichen, um sie auf die einfachsten Ausdrücke zurückzuführen, und sie nach der Ordnung des Alphabeths auf das bequemste für die Uebersicht aufzustellen.

Beispiele.

1) $fc - cd + ba$; zurückgeführt $= ab - cd - cf$; wobei wir auf weiter nichts, als auf die Ordnung des Alphabeths zu sehen hatten.

2) $ab + 2ab + cd + 4cd$; zurückgeführt $= 3ab + 5cd$. Wir haben den ersten und den zweiten Ausdruck, da sie aus einerlei Buchstaben bestehen, und einerlei Zeichen haben, mit einander verbunden, und ihrer Summe den gehörigen Koefficienten gegeben, und eben so verfuhren wir beim dritten und vierten Ausdruck.

3) $2a - 2a + a - bc + bc - m$; zurückgeführt $= a - m$. Man mußte nämlich den ersten, zweiten, vierten und fünften Ausdruck wegfallen lassen, weil der eine gerade so verneinend, als der andere bejahend war; folglich der eine den andern aufhob (§. 6).

4) 4a

4) $4a - 2a + 6bc - 2bc$; zurückgeführt $= 2a + 4bc$. Die Hälfte des ersten Ausdrucks hebt den zweiten auf. Man muß also den Ausdruck $4a - 2a$ in $2a$ verwandeln, und eben so aus den beiden folgenden Ausdrücken $6bc - 2bc$ machen $4bc$.

Bei Zahlen, wenn sich die Gelegenheit dazu darböte, würde man die nämliche Reduktion vornehmen. Man würde z. B. nicht $4 + 16$, sondern 20 sprechen; auch nicht $20 - 20$, sondern Null; auch nicht $20 - 5$, sondern 15.

Addition.

§. 19.

Man erhält die Summe mehrerer algebraischen Grösen, wenn man sie alle auf der Reihe mit ihren Zeichen hinschreibt, und sie nachher reducirt (§. 18).

Beispiele.

1) Algebraische Grösen zu addiren, die einerlei Zeichen, und einerlei Buchstaben haben?

$$\begin{array}{c} 2a - 2b - 2c \\ 4a - 4b - 4c \\ \hline 2a + 4a - 2b - 4b - 2c - 4c \end{array}$$

reducirt

$$= 6a - 6b - 6c = \text{der Summe.}$$

2) Al-

2) Algebraische Grösen zu addiren, die einerlei Buchstaben; aber verschiedne Zeichen haben?

$$\begin{array}{c} 3a - 4b \\ -2a + 2b \\ \hline 3a - 2a - 4b + 2b \end{array}$$

reducirt

$$= a - 2b.$$

3) Verschiedne algebraische Grösen, die verschiedne Buchstaben haben, zu addiren?

$$\begin{array}{c} ab - cd \\ mn + os \\ \hline ab - cd + mn + os. \end{array}$$

4) Wenn die algebraischen Grösen, die man addiren will, aus mehreren ähnlichen Ausdrücken zusammengesezt wären; hätte man z. B. die polynomischen Grösen zu addiren?

$$3a^2b^3 - 5cs^4 - 4dr + 2s$$
$$- a^2b^3 + 4cs^4 + 4dr - s$$

so bekämen wir in der Summe

$$3a^2b^3 - a^2b^3 - 5cs^4 + 4cs^4 - 4dr + 4dr + 2s - s$$

und in der Reduktion

$$= 2a^2b^3 - cs^4 + s$$

§. 20.

Aehnlich sind aber Grösen in der Algebra, die einerlei Buchstaben, und die nämliche Anzahl

zahl von Buchstaben haben. So sind 5abd, und 2abd ähnliche Grösen. Die erste deutet an, daß die Gröse abd fünfmal; die andere, daß sie zweimal genommen worden ist. Sie kommt also hier im Ganzen siebenmal vor; also muß man auch 7abd schreiben, statt 5abd + 2abd und da der Ausdruck 7abd einfacher ist, als 5abd + 2abd, so ist auch dies die Ursache, warum man in diesem Falle spricht, es sei die Gröse auf den einfachsten Ausdruck zurückgeführt worden, eben so wie beim arithmetischen Addiren der Zahlen die gegebenen vielen Grösen in der Summe auf eine einfachere Zahl zurückgeführt werden.

§. 21.

Man hat nicht nöthig auf die Koefficienten besonders Achtung zu geben, wenn es uns um ähnliche algebraische Grösen zu thun ist. Man schreibe nur die Buchstaben genau nach der Ordnung des Alphabeths. Denn ist gleich 2abd die nämliche Gröse, wie 2dba: so hat man doch sehr genau darauf zu merken, daß man die Ordnung des Alphabeths nicht stört. Dies macht die Rechnung klarer. Denn 5abd und 2abd fallen als ähnliche Grösen eher ins Gesicht, als 5bad und 2bda. Die Grösen $3b^2c$ und $4b^2c$ sind gleichfalls ähnliche Grösen. Aber die Grösen $4a^3$ und $2a^3f$ sind keine ähnliche Grösen, ob sie gleich die Gröse a^3 gemeinschaftlich haben. Denn zum Wesen ähnlicher Grösen gehört dies, daß sie völlig

einere

einerlei Buchstaben, und die nämliche Anzahl von Buchstaben haben.

Ausführlichere Wiederholung der Addition.

§. 22.

Die Aufgabe, mit Buchstaben zu addiren, löset man auch gewöhnlich also auf: Sind erstlich nicht einerlei Buchstaben gegeben, so schreibet sie blos mit ihren Zeichen hinter einander; die Grösen mögen positive, oder negative sein (§. 19. Nr. 3). Sind zweitens die Buchstaben und Zeichen einerlei: so zähler die gleichen Buchstaben zusammen, und sezet vor jede Zahl wie viele ihrer sind, (§. 19. Nr. 1). Sind aber einerlei Buchstaben mit verschiedenen Zeichen da: so ziehet die kleinere Zahl von der grösern ab, und sezet bei den Rest das Zeichen der grösern (§. 19. Nr. 2.)

Erläuterungen.

§. 23.

Mehrere Grösen zu einander addiren heißt nichts mehr und nichts weniger, als sie unter einander verbinden, oder sie zusammen in einem Inbegriffe darstellen mit den Zeichen, die sie haben. Addiret man z. B. mehrere positive Vermögen, so geben wir das Mehr des Vermögens zusammengenommen so an, daß das wahre und ganze Vermögen in einem Inbegriffe

griffe herauskommt, der eine grösere Menge in sich faßt, als ein jeder seiner Theile einzeln genommen. Addiren wir Schulden, so stellen wir in ihrer Verbindung eine grösere Schuld auf. Addiren wir Vermögen und Schulden, so liefern wir in der Verbindung ein Resultat, welches den Ueberschuß des Vermögens über die Schuld, oder den Ueberschuß der Schuld über das Vermögen darstellet, je nachdem das Vermögen gröser, als die Schuld, oder die Schuld gröser, als das Vermögen ist.

§. 24.

Hieraus erhellet, daß Addiren in der Algebra nicht nothwendig so viel heiße, als vergrösern. Wenn ich ein Vermögen mit einem andern Vermögen verbinde, so vergrösere ich das Vermögen. Eben so vergrösere ich die Schuld, so bald ich eine Schuld mit einer andern Schuld verbinde. Allein verbinde ich ein Vermögen mit einer Schuld, so vermindere ich wirklich die eine, oder die andere dieser beiden Grösen.

§. 25.

Ungleiche entgegengesezte, das ist, positive und negative Grösen von einer Art werden addirt (§. 22. Vergl. §. 19. Nr. 2), wenn man die kleinere von der grösern abzieht, und dem Reste das Zeichen der grösern giebt. Denn was einander aufhebt, muß man aufheben, weil es solche Grösen sind, die einander ver-

mindern (§. 6). Allemal wird aber von der grösern, weil sie ungleich sind, noch etwas übrig bleiben; also muß natürlich auch der Rest das Zeichen der grösern erhalten. Z. B. $+6-2=4$; $+3-8=-5$. Ueberschaut man in der Vergleichung mit einer gewissen Fertigkeit alles, was sich gegen einander aufhebt, und reduciret die Grösen, das ist, sezet man den Rest mit den gehörigen Zeichen hin (§. 18): so ist diese Regel so gar nöthig nicht, wie die obigen und nachfolgenden Beispiele beweisen.

§. 26.

Also heben sich gleiche entgegengesezte Grösen einander auf, das ist, sie werden ein respektives Nichts, weil Nichts übrig bleibt. Z. B. $3-3=0$; $20-20=0$. (§. 6. 18).

§. 27.

Sollen Grösen, die unter einerlei Zeichen vorkommen, addiret werden: so ist es für sich klar, daß man sie geradezu addiret und mit Beibehaltung des Zeichens zusammenzählet, oder verbindet. (§. 22. 19. Nr. 1). Z. B. $+3+5=8$; $-3-2=-5$.

§. 28.

Sollen Grösen von verschiedner Art addiret werden: so werden sie blos mit ihren Zeichen zusammengehängt und verbunden (§. 22. 19. Nr. 3). z. B. $2a+3b=2a+3b$.

Beispiele.

Beispiele.

§. 29.

Erster Fall — wenn oben und unten in der Reihe gleiche Zeichen vorkommen (§. 22. 19. Nr. 1).

$$\begin{array}{l} 3a - b + 4f - 3g \\ 2a - 5b + 2f - 2g \\ \hline 5a - 6b + 6f - 5g. \end{array}$$

In der Arithmetik ist es beim Addiren nicht gleichgültig, ob man die Zahlen von der Linken nach der Rechten, oder von der Rechten nach der Linken zusammenzählen will. In der Algebra ist man an keine dieser Seiten gebunden, und gewöhnlich fängt man am vortheilhaftesten auf der linken Hand an. Dies kommt daher, daß die Buchstaben ihren Werth nicht von der Stelle, wo sie stehen, erhalten, wie es bei den Zahlen geschieht (§. 2).

Zweiter Fall — wenn oben und unten verschiedene Zeichen vorkommen (§. 22. 19. Nr. 2).

$$\begin{array}{l} 6a - 4b + 3f - g \\ -3a + 5b - 8f + g \\ \hline 3a + b - 5f \end{array}$$

Gesezt es kämen in diesem Falle mehrere Reihen unter einander zu stehen. Z. B.

$$\begin{array}{rrr} 3a & -6b & +f \\ 2a & +3b & -3f \\ -a & -2b & +4f \\ \hline 4a & -5b & +2f \end{array}$$

Alsdann zählt man entweder die ähnlichen und gleichbezeichneten Grösen zuerst zusammen (§. 19. Nr. 4. und §. 20), und wendet hernach die Regel bei verschiedenen Zeichen an = $5a - a - 8b + 3b + 5f - 3f$, oder hebt, wenn man im Zählen geübt ist, was sich gegen einander aufheben läßt, wirklich auf, und sezt die Reste hin (§. 18).

Dritter Fall, wenn verschiedene Buchstaben, das ist, Grösen, die nicht von einer Art sind, vorkommen (§. 22. 19. Nr. 3). Z. B.

$$\begin{array}{rrrr} 2a & -b & +3g & \\ 4a & +2b & & -h \\ \hline 6a & +b & +3g & -h. \end{array}$$

Endlich wollen wir auch noch ein Beispiel, wo alle Fälle vorkommen, hersezen, und dann diese Regel auf genannte Zahlen anwenden, damit Anfänger sehen, wie allgemein und natürlich die algebraische Regel ist.

$$\begin{array}{rrrrrr} a & -3bg & +f & -4h & -cd & \\ 2a & -2bg & -3f & +3h & -4cd & +g \end{array}$$

Man sieht leicht, daß hier die Ordnung des Alphabeths nicht gehörig wahrgenommen wor-

worden ist. Also muß zuerst für diese gesorgt werden, und dann kommt das Beispiel also vor:

$$\begin{array}{l} a - 3bg - cd + f + g - 4h \\ 2a - 2bg - 4cd - 3f \quad + 3h \\ \hline a - bg - 5cd - 2f + g - h \end{array}$$

Oder in genannten Zahlen:

1) „ „ 6 rthlr. — 20 ggr. + 3 ₰
2 rthlr. + 22 ggr. — 5 ₰
———————————————
8 rthlr. + 2 ggr. — 2 ₰

2) 4 fl. + 30 kr. — 2 hl.
3 fl. — 50 kr. + 5 hl.
———————————————
7 fl. — 20 kr. + 3 hl.

§. 30.

An den folgenden Beispielen mag sich der Anfänger selbst üben:

$$1)\quad \begin{array}{l} a + b - c \\ g - h - k \\ m + n - p? \\ \hline \end{array}$$

$$2)\quad \begin{array}{l} a + b + c + d \\ b - f + g + a \\ c + e - b + g \\ h + c + n - d? \\ \hline \end{array}$$

3) $3a - 2b + 4c - 8d$
$\quad -8a - 7b - 5c + 4d$
$\quad 3a - 4b + 6h$?

4) $3a - b + 2c - x - 2d$
$\quad - a - 2b + 5c + x + 3y$?

§. 31.

Es kommt also bei der algebraischen Addition alles auf drei Regeln an (§. 22):

1) Wenn einerlei Grösen, oder Grösen von einerlei Art (§. 20) und zwar mit einerlei Zeichen sollen addiret werden: so geschieht dies, wie bei den Zahlen in der Arithmetik, mit Beibehaltung der Buchstaben und Zeichen (§ 29. erster Fall). Fast scheint es unerheblich zu sein, die Richtigkeit dieses Verfahrens weiter zu erläutern. Stellet euch aber, damit eurer Ueberzeugung weiter gar nichts abgehen möge, unter den Buchstaben und Zeichen gewisse Grösen, oder Dinge vor, und ihr werdet die Richtigkeit dieser Addition leicht, deutlich und vollständig einsehen. Z. B.

$3a = 3$ Schritt vorwärts.
$7a = 7$

$10a = 10$ Schritt vorwärts.

oder ferner

$-5b = 5$ Rthlr. Schulden
$-3b = 3$

$-8b = 8$ Rthlr. Schulden.

Zwar

Zwar bedeutet in der Folge a, b, und x nicht Sachen, sondern selbst Zahlen. Aber auch alsdann ist klar, daß wenn a z. B. 10 wäre, dreimal zehen, oder 30, und siebenmal 10, oder 70 beide mit + zusammen zehnmal zehen, oder 100, ebenfalls mit + machen würden. So wird auch b = 8 fünfmal 8, oder 40, und dreimal 8 oder 24, beide mit — zusammen, achtmal 8, oder 64, gleichfalls mit — sein.

2. Wenn aber einerlei Grösen und mit verschiedenen Zeichen sollen addiret werden, so heben solche einander entgegengesezte Grösen in der Addition einander auf, und anstatt zu addiren, ziehe man immer die kleinere von der grösern ab, und zu dem, was übrig bleibt, seze man das Zeichen der grösern. Z. B.

7a	=	7 rthlr. Vermögen
— 3a	=	3 rthlr. Schulden
4a	=	4 rthlr. Vermögen.

oder es sei

— 5b	=	5 Schritt vorwärts
b	=	1 Schritt rückwärts
— 4b	=	4 Schritt vorwärts.

3. Schließlich, wenn Grösen von verschiedner Art sollen addiret werden, so werden sie blos mit ihren Zeichen an einander gesezt (§. 22. 19. Nr. 3. §. 28).

Subtraktion.

§. 32.

Werden uns in der algebraischen Subtraktion monomische Grösen gegeben, so schreibe man sie nur hinter einander weg und verwechsle die Zeichen der Gröse, welche soll abgezogen werden. Haben alsdann die Grösen Aehnlichkeit (§. 19. Nr. 4), so führe man sie nach derselben auf die einfachsten Ausdrücke zurück. Will man z. B. von b + c abziehen, so schreibet nur b — c; und von a — b = a + b, so daß also a durch diese Subtraktion vergrößert wird.

§. 33.

Sollen aber polynomische Grösen abgezogen werden, so sezet die Ausdrücke der Gröse, welche abgezogen wird, unter die andern Ausdrücke der andern Gröse, wovon die Subtraktion geschehen soll, das ist, die ähnlichen Ausdrücke von beiden unter einander, und verändert nur die — und + in die entgegengesezten Zeichen + und —. Gesezt wir sollten — $2cx + 3acx^2 + 4a^3m - 5a^3b$ (= A) von einer andern polynomischen Gröse $7acx^2 - 5a^3b + 5a^3m - acx + bd$ (= B) abziehen, so würde man sie also anordnen:

$$7acx^2 - 4a^3b + 5a^3m - acx + bd \quad (B)$$
$$-3acx^2 + 5a^3b - 4a^3m + 2acx \quad (A)$$
$$\overline{4acx^2 + a^3b + a^3m + acx + bd}$$

Die

Die Ausdrücke der polynomischen Gröse $= A$ sind hinter unter den Ausdrücken der andern polynomischen $= B$ in ihrer Aehnlichkeit geordnet, und die abzuziehende Gröse A hat die entgegengesezten Zeichen erhalten. Nach dieser Vorbereitung lassen sich nun die polynomischen Ausdrücke auf die möglichst einfachen zurückführen, und diese Reduktion giebt die Differenz

$$4acx^2 + a^5b + a^3m + acx + bd.$$

§. 34.

Sind die algebraischen Ausdrücke einander nicht ähnlich, so schreibt man die Gröse, welche abgezogen werden soll, schlechtweg hinter die Gröse, von der die Subtraktion geschehen soll; aber eben so wie (§. 32. 33) mit veränderten Zeichen. Z. B. es sollen $xx - 2cx + cc$ von $2a^4 - 3b^2$ abgezogen werden, so sezet hinter einander weg

$$2a^4 - 3b^2 - xx + 2cx - cc$$

Beispiele.

Erster Fall. Um von

$$ab$$
$$-mn \text{ abzuziehen}$$

schreibe $ab + mn$ hintereinander mit veränderten Zeichen des Gegensazes (§. 34).

Zweiter Fall. Algebraisch abzuziehen vorausgesezt, daß die Grösen einerlei Zeichen und Buchstaben haben (§. 33):

$$\begin{array}{r} 4ab + 4cd \\ 2ab + 2cd \\ \hline 4ab - 2ab + 4cd - 2cd \\ \hline 2ab + 2cd \end{array}$$ reducirt

Um 2ab von 4ab abzuziehen, seze ich mit veränderten Zeichen $4ab - 2ab, = 2ab$ und eben so bei den beiden folgenden Ausdrücken für $4cd - 2cd = 2cd$.

Dritter Fall. Eine algebraische Gröse von einer andern abzuziehen, mit der Unterstellung, daß die beiden Grösen einerlei Buchstaben; aber verschiedne Zeichen haben (§. 33). Z. B.

$$\begin{array}{r} 4mn + 6rs \\ -2mn - 2rs \\ \hline 4mn + 2mn + 6rs + 2rs \\ \hline \end{array}$$

in der Reduktion

$$= 6mn + 8rs$$

Vierter Fall. Eine algebraische Gröse von einer andern abzuziehen, mit der Unterstellung, daß die beiden Grösen verschiedne Zeichen und Buchstaben haben (§. 34.). Z. B.

$$\begin{array}{r} 2ab - 4cd \\ -mn + 2rt \\ \hline 2ab + mn - 4cd - 2rt. \end{array}$$

Aus-

Ausführliche Wiederholung der Subtraktion.

§. 35.

Die Regeln, worauf die ganze algebraische Subtraktion beruhet, sind nur die drei folgenden:

1. Sind in den Aufgaben nicht einerlei Buchstaben vorhanden, das ist, keine ähnliche Grösen (§. 19. Nr. 4): so schreibet diejenigen, welche sollen abgezogen werden, geradezu hinter diejenigen, von welchen sie abzuziehen sind, mit dem Zeichen — (§. 32. und 34).

2. Sind einerlei Buchstaben und Zeichen vorhanden, und es soll das Kleinere von dem Grösern abgezogen werden: so verfahret eben so, wie bei der Rechnung mit Zahlen. Soll aber das Grösere vom Kleinern abgezogen werden, so ziehet das Kleinere von dem Grösern ab, und sezet statt + das Zeichen —; und umgekehrt statt — das Zeichen + zum Reste an (§. 33).

3. Sind die Zeichen verschieden, so addiret die ähnlichen Buchstaben, und sezet zu der Summe das Zeichen desjenigen, von welchem die Subtraktion geschehen ist.

Erläuterungen.

§. 36.

Bei der Subtraktion der in Buchstaben und mit Zeichen ausgedrückten Grösen von ei-

nerlei Art soll man entweder + von +, oder — von —, oder — von +, oder + von —, und in allen diesen Fällen entweder das Kleinere von dem Grösern, oder das Grösre von dem Kleinern abziehen. Diese Fälle alle zusammen haben wir den obigen Regeln beigebracht (§. 35).

§. 37.

Wenn bei Dingen von einerlei Art und mit einerlei Zeichen das Kleinere von dem Grösern abgezogen werden soll; so subtrahire man, wie bei den Zahlen mit Beibehaltung der Zeichen (§. 35. Nr. 2). Z. B.

7a	7 rthlr.	—6b	—6 rthlr.
5a	5 rthlr.	— b	—1 rthlr.
2a	2 rthlr.	—5b	—5 rthlr.

3x =	30 rthlr.
x	10 rthlr.
2x	20 rthlr.

§. 38.

Wenn bei Dingen von einerlei Art, und mit einerlei Zeichen das Grösere von dem Kleinern abgezogen werden soll: so ziehe man das Kleinere von dem Grösern ab, und zu dem Reste seze man die entgegengesezten Zeichen (§. 35 Nr. 2. Vergl. §. 33). Z. B.

—3a

— 3a	— 3 rthlr.	— y	— 10 rthlr.
— 5a	— 5 rthlr.	— 3y	— 30 rthlr.
+ 2a	+ 2 rthlr.	+ 2y	+ 20 rthlr.

§. 39.

Sollen endlich Dinge von einerlei Art, und mit verschiednen Zeichen von einander abgezogen werden, so werden die Grösen, wenn das Grösere von dem Kleinern und das Kleinere von dem Grösern subtrahirt wird, in jedem dieser Fälle addirt, und zu der Summe wird das Zeichen derjenigen Gröse gesezt, wovon die Subtraktion geschehen ist (§. 35. Nr. 3). Z. B.

+ 8c	— 5a	+ c	— x
— c	+ 3a	— 3c	+ 5x
+ 9c	— 8a	+ 4c	— 6x

§. 40.

Von der Richtigkeit der Regel, die so eben ist gegeben worden, kan man sich auf verschiedne Art überzeugen. Die folgende ist die leichteste und kürzeste. Wenn die gefundne Gröse mit der abgezognen zusammengenommen (Arithm. §. 33) der andern gegebenen gleich ist, so besteht die Probe und es ist richtig subtrahirt worden. Untersucht man auf diesem Wege das Verfahren nach den Regeln in der Subtraktion, so wird man sich fest überzeu-

zeugen können, daß die gegebenen Regeln wahr und richtig sind. Wenn z. B.

$$\begin{array}{lrl} & +\ 3a & A \\ & -\ 5a & B \\ \hline & -\ 8a & C \\ \text{addirt} & +\ 3a & E \\ \hline & -\ 5a & D \end{array}$$

von A abgezogen werden soll B, so muß der Rest C sein. Denn CE addirt, geben D = − 5a = B.

§. 41.

Wenn man einen jeden dieser vorerwähnten besondern Fälle in der Subtraktion mit Buchstaben aufmerksam und genau betrachtet, so wird man finden, daß in allen Fällen derselbe Rest herauskommt, wenn man die abzuziehende Gröse mit dem entgegengesezten Zeichen addirt. Z. B. + c abgezogen 3c giebt + 4c, und ebenfalls giebt + 3c und + c zusammen addiret + 4c.

§. 42.

Hieraus fließt demnach eine allgemeine und so leichte Regel für alle mögliche Fälle der Subtraktion mit Buchstaben, daß man nicht nöthig hat, die vorigen Regeln weiter zur Ausübung zu bemerken:

Man

Man verändere alle Zeichen der abzuziehenden Gröse in die entgegengesezten Zeichen und addire nach geschehener Veränderung (32. 33) Z. B.

$$\begin{array}{l} 3a - b - 2c + 5d + 3x - 7y \\ -2a - 3b + 5c + 2d + 6x - y \\ + \quad + \quad - \quad - \quad - \quad + \\ \hline 5a + 2b - 7c + 3d - 3x - 6y. \end{array}$$

Denn

$$\begin{array}{l} -2a - 3b - 5c + 2d + 6x - y \\ \hline = 3a - b - 2c + 5d + 3x - 7y \end{array}$$

addirt

§. 43.

Wenn also endlich Grösen von verschiedner Art von einander sollen subtrahirt werden, so folget nun, daß nur die abzuziehenden Grösen mit dem entgegesezten Zeichen hinzugesezt werden dürfen. Z. B.

$$\begin{array}{lll} 3a & 7x - y & \\ -2b & 2x & +r \\ + & - & - \\ \hline 3a + 2b & 5x - y & - r \end{array}$$

§. 44.

Wenn man entgegengesezte *) Grösen von einander subtrahirt, so darf man blos alle Zeichen

*) Die Manier nach §. 42. zu subtrahiren ist zu wichtig, als daß ich nicht dem Anfänger zum Besten die Kästnerischen und Klemmischen Beweise und Erläuterungen hersezen sollte.

chen der zu subtrahirenden Zahl mit den entgegengesezten, das ist + mit —, und — mit + verwechseln, und hernach addiren. Die Summe wird die Differenz sein (§. 32. 33. 42). Denn entweder hat die subtrahirende Gröse das Zeichen +, oder sie hat das Zeichen —. Ist jenes, so ist klar, daß durch die Subtraktion aus + werden müsse —. Denn wenn man + 3 von 8 subtrahirt, so hat man 8 — 3. Hat aber die abzuziehende Gröse das Zeichen —, so muß + daraus werden. Denn wenn die positive Gröse ihr Zeichen in das Zeichen der negativen bei der Subtraktion verwandelt: so muß kraft des unmittelbaren Gegensazes die negative ihr Zeichen in das Zeichen der positiven verwandlen.

§. 45.

Wenn eine Gröse, von der eine andere abgezogen werden soll, von einer dritten subtrahirt wird, so wird die erste subtrahirt, und die andere addirt, weil eben diese zweite zu viel abgezogen worden ist, wenn man die erste ganz subtrahirt. Z. B. wenn ich von 9 subtrahire 8 — 4, so kommt heraus 9 — 8 + 4 = 5. Denn wenn man 8 ganz subtrahirt, so kommt heraus 1. Ich soll aber nicht schlechtweg 8, sondern nur 8 — 4 subtrahiren, folglich muß ich 4 wieder addiren. Die zu subtrahirende Gröse wird in eine ( ) eingeschlossen. Z. B. 7 — (5 — 4) = 7 — 5 + 4 = 6; 10 — (3 — 1) = 10 — 3 + 1 = 8.

§. 46.

Man wird also leicht subtrahiren können, wenn man addiren kan (§. 24. 25. fg). Nichts destoweniger will ich noch einige Exempel geben. Man verändert nämlich blos die Zeichen der subtrahirenden Zahl. Z. B.

$$\begin{array}{rrrrl}
3a & -3b & +4g & -f & =A \\
2a & +b & -3g & -f & =B \\
- & - & + & + & \\
\hline
a & -2b & +7g & & =C \\
2a & +b & -3g & -f & =B \\
\hline
3a & -3b & +4g & -f & =A
\end{array}$$

In der abzuziehenden Zahl B hat 2a kein Zeichen. Man versteht also das Zeichen plus (§. 8); folglich sezet darunter —; b hat +; folglich sezet darunter —; 3g hat —, man sezet dafür +; f hat —; man sezet +. Diese Zeichen unten hingeschrieben wird addirt. Eben so wird das nachfolgende Exempel berechnet:

$$\begin{array}{rrrrrrl}
5a & -3b & +f & -9h & +8 & & =A \\
2a & +3b & +f & -8h & -8 & +g & =B \\
- & - & - & + & + & & \\
\hline
3a & -6b & & -h & +16 & -g & =C \\
2a & +3b & +f & -8h & -8 & +g & =B \\
\hline
5a & -3b & +f & -9h & +8 & & =A.
\end{array}$$

Mul-

Multiplikation.

§. 47.

Bei der algebraischen Gröse $= + 3a^2$ können vier Stücke unterschieden werden; das Zeichen +, der Koefficient 3, der Buchstab a und der Exponent 2. Soll man also $+ 3a^2$ durch $+ 2a^3$ multipliciren, so muß unser Verfahren vier Gegenstände bearbeiten, die Zeichen, die Koefficienten, die Buchstaben, und die Exponenten.

§. 48.

Werden einerlei Zeichen multiplicirt, so erhält das Produkt das Zeichen +; sind die Zeichen einander bei den Faktoren entgegengesezt, so liefert das Produkt das Zeichen —. Im folgenden Täfelchen sind also alle mögliche Fälle der Multiplikation der Zeichen enthalten:

+ × + giebt +
— × — giebt +
+ × — giebt —
— × + giebt —

§. 49.

Man wird sich vielleicht wundern, daß — × — im Produkte + giebt. Betrachtet man aber eine algebraische Gröse, welche das Zeichen — hat, als eine Schuld, die man hat, und daß die Multiplikation einer negativen Gröse durch eine negative im Grunde eine

wahre

wahre Subtraktion ist, so wird die Verwunderung wegfallen. Es ist aber evident, daß Einer seine Schulden, ohne daß man ihm ein positives Geld giebt, nicht bezahlen kan, so wenig als sich die Finsterniß aus einem Orte vertreiben läßt, ohne daß man ein Licht hineinbringt. Also muß — × — ein + geben.

§. 50.

+ multiplicirt mit — muß im Zustande die Lage von Minus geben; also das Zeichen —. Aber auch — multiplicirt mit + muß im Produkte das Negative von + aufstellen, das ist, das Zeichen — liefern. Dieser Beweis scheint nach der Metaphysik zu schmecken. Allein es gelten diese Regeln schon in der gewöhnlichen Arithmetik mit Zahlen. Wollte ich z. B. + 8 — 3 durch + 4 — 2 multipliciren, so käme im Produkte nicht mehr, als zehen heraus.

§. 51.

Die Koefficienten multipliciren sich, wie in der Arithmetik.

§. 52.

Man multiplicirt die Buchstaben, wenn man sie unmittelbar aneinander hängt (Arithm. §. 5); allemal nach alphabethischer Ordnung. So ist ab das Produkt von a . b.

§. 53.

Besteht der Multiplikandus und Multiplikator aus mehreren Ausdrücken, so multiplicirt jeder Ausdruck des Multiplikators alle und jede Ausdrücke des Multiplikandus.

§. 54.

Die Exponenten multipliciren sich nicht, sondern addiren, und werden zusammengezählt. So ist a^5 das Produkt von $a^2 \times a^3$.

§. 55.

Beispiele.

Erster Fall. Simple algebraische Grösen von einerlei Zeichen und Buchstaben zu multipliciren?

$$\begin{array}{l} + 4\ abc \\ + 3\ abc \\ \hline + 12\ aabbcc = 12a^2b^2c^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} - 6\ mnrr \\ - 3\ mnrr \\ \hline 18\ mmnnrrr = 18m^2n^2r^3 \end{array}$$

Zweiter Fall. Simple algebraische Grösen mit verschiednen Zeichen und Buchstaben zu multipliciren?

$$\begin{array}{l} + abf \\ - cmr \\ \hline - abcfmr \end{array}$$

Drit-

Dritter Fall. Simple algebraische Grösen von einerlei Buchstaben; aber verschiednen Exponenten zu multipliciren?

$$\begin{array}{l} -\ a^2\ b^3\ c^4 \\ +\ a^2\ b^2\ c^3 \\ \hline -\ a^4\ b^5\ c^7 \end{array}$$

Vierter Fall. Zusammengesezte algebraische Grösen zu multipliciren?

$$\begin{array}{lccccccc} & + & a & + & b & & & \\ & + & a & - & b & & & \\ \hline & + & aa & + & ab & - & bb & \\ & & & - & ab & & & \\ \hline \text{Produkt} & + & aa & + & ab & - & ab & - bb \\ \hline \text{Reducirt} & + & aa & - & bb & = & a^2 - b^2. & \end{array}$$

Ausführliche Wiederholung der Multiplikation.

§. 56.

Die Aufgabe mit Buchstaben zu multipliciren löset sich in den beiden Regeln auf: Hänget den einen Faktor an den andern (Arithm. §. 5. Algebr. §. 52). Einerlei Zeichen der Faktorum giebt +; verschiedne geben — (§. 49. 50).

§. 57.

Man multiplicirt eine Gröse durch eine andere, wenn man die erste so vielmal wiederholet, als die andere Einheiten in sich enthält, und zwar allemal im Sinne und Begriffe der zweiten, das ist, wenn man sie mit ihren eigenthümlichen Zeichen addiret, im Fall der Multiplikator positiv ist; oder subtrahirt, folglich die Zeichen ändert, wenn der Multiplikator negativ ist. Dies alles folgt deutlich aus den Begriffen, die wir von der Addition und Subtraktion in Buchstaben angegeben haben.

§. 58.

Es beruhet also die Multiplikation mit entgegengesezten Grösen auf der einzigen kurzen Regel: verschiedne Zeichen geben Minus (§. 56. 49. 50). Denn sind die Zeichen verschieden, so ist es klar, daß das Produkt negativ werden muß. Das ist, $+ 4 \cdot - 3$ ist $= - 3 \cdot 4$ und $- 3 \cdot + 4$ ist $= - 4 \cdot 3$, weil $- 3$ in $- 12$ so oft enthalten sein muß, als $+ 1$ in $+ 4$ (Arithm. §. 5. Erl.. 4). Sind aber die Zeichen einerlei, so ist das Produkt positiv, welches bei zweien positiven Faktoren klar ist. Denn $+ 3 \cdot + 4$ ist $= 12$. Aber eben so klar wird es auch bei negativen, wenn man nur bedenkt, daß der eine Faktor so oft im Produkte enthalten sein muß, als die Einheit in dem andern Faktor enthalten ist. Es steckt aber nicht die positive Einheit, oder

$+ 1$,

+ 1, sondern das Gegentheil des + 1 in dem einen negativen Faktor. Also muß auch das Gegentheil des andern negativen Faktors, das ist + im Produkte stehen. Folglich muß das Produkt das Zeichen Plus haben. Z. B. $-3 \cdot -4 = +12$, weil das Gegentheil von + 1, d. i. − 1 in − 3 dreimal steckt; folglich auch das Gegentheil der − 4, d. i. + 4 in 12 dreimal enthalten sein muß, welches nicht geschehen könnte, wenn 12 negativ wäre.

§. 59.

Den Beweis, welchen wir so eben vorgetragen haben, verdanken die Mathematiker dem Hrn. Hofrathe Kästner. Lassen Sie uns nun das Vorgetragene durch Beispiele erläutern. Es giebt zwei Fälle. Entweder besteht der Multiplikator nur aus einem Buchstaben, oder Zahlzeichen, oder aus mehreren, die durch das Zeichen + oder − verbunden sind.

Der erste Fall ist leicht (§. 52).

$$\begin{array}{r} a - x \\ x \\ \hline ax - xx \end{array} \qquad \begin{array}{r} a - b + 3d \\ - b \\ \hline -ab + bb - 3bd \end{array}$$

$a \cdot x = ax$ (§. 52); $+x \cdot -x = -xx$ (§. 56. 58), und im zweiten Beispiele $+a \cdot -b = -ab$ (52. 56); $-b \cdot -b = +bb$ (§. 56. 58), u. s. w.

Der zweite Fall. Wenn beide Faktoren aus mehr Buchstaben bestehen, sie mögen einerlei, oder verschieden sein?

Erst. Beisp.

$$\begin{array}{l} a + b \\ a + b \\ \hline aa + ab \\ \quad\;\; + ab + bb \\ \hline aa + 2ab + bb. \text{ reducirt.} \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \; (\S.\ 54). \end{array}$$

Erstlich multiplicirt man die angegebenen Faktoren ganz mit a; a . a = aa = a^2; a . b = ab (§. 52); hernach mit b; b . a = ab; b . b = bb = b^2. Man schreibt diese Produkte von der ersten Reihe zur linken Hand an, und so weiter fort nach der rechten, um sich die Uebersicht und die Addition zu erleichtern. Zwar man könnte sie auch in gerader Linie fortschreiben. Diese zwei Partialprodukte addire man zusammen, und erhält man in der ersten Manier aa + 2ab + bb; in der zweiten (§. 54), $a^2 + 2ab + b^2$ zum vollständigen Produkte. Weil nun überall die Zeichen + vorkommen, so hat das Produkt auch diese Zeichen (§. 49. 56).

Zweit. B.

$$\begin{array}{l} a - b \\ a - b \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} aa & - ab & & \\ & - ab & + bb & \\ \hline aa & - 2ab & + bb & \text{reducirt.} \\ \hline a^2 & - 2ab & + b^2 & \end{array}$$

Auch hier wird wieder die erste Reihe ganz mit a; hernach mit — b multiplicirt. a . a = aa = a^2 ; a . — b = — ab ; ferner — b . a = — ab und — b . — b = + bb (§. 52. 56. 58), und erhalten wir ein vollkommnes Quadrat, wo die Wurzel a — b ist.

Dritt. Beisp. $$\begin{array}{lll} a & - b & \\ a & + b & \\ \hline aa & - ab & \\ & + ab & - bb \\ \hline aa & & - bb. \text{ reducirt} \\ \hline a^2 & - & b^2 \end{array}$$

Im dritten Beispiele wird die Summe zweier Zahlen mit ihrer Differenz multiplicirt; das Produkt ist die Differenz der Quadrate. Denn a . a = aa = a^2 ; a — b = — ab; + b . + a = + ab , und + b . — b = — bb = — b^2. Wenn man nun die Partialprodukte, wie es ohnehin geschehen ist, addirt: so heben sich — ab und + ab auf, und der Rest aa — bb = a^2 — b^2 giebt das verlangte Produkt (§. 55. viert. Fall).

§. 60.

$(a+b).(a+b)$, oder $(a+b).(a-b)$ giebt immer ein Quadrat, und man kan für $a^2+2ab+b^2$ den ersten; und für $a^2-2ab+b^2$ den zweiten Werth, und umgekehrt sezen.

§. 61.

Wenn in der Rechnung a^2-b^2 vorkommt, so kan man jedesmal $(a-b).(a+b)$ dafür sezen, und auch umgekehrt, wie es die Schicklichkeit erfordert.

§. 62.

Für den Ausdruck $ax-xx$ läßt sich $(a-x)x$ und umgekehrt; wie auch für $x-xx$ der Ausdruck $(1-x)x$ sezen. Denn wenn man wirklich multiplicirt, so kommt $x-xx$ heraus (§. 59. dritt. Beisp.).

§. 63.

Die Manier im Schreiben der Produkte ist nicht nothwendig gerade diejenige, wie wir sie bisher in den obigen Beispielen hingesezt haben. Man kan auch die Produkte gerad aus schreiben, wie an dem angeführten Orte ist bemerkt worden (§. 54).

Z. B. $a+b$
$a+b$

$a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$

$a-b$

$$\begin{array}{l} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2 \end{array}$$

Das erste Exempel wird unten gebraucht werden. Das lezte zeigt, wie bequem diese Rechnung ist, allgemeine Lehrsäze zu finden. Es heißt nämlich: die Summe zweier Zahlen mit ihrer Differenz multiplicirt giebt die Differenz ihrer Quadrate. Z. B. $17 . 3 = 51 = 10^2 - 7^2$ (§. 59. dritt. Beisp.)

§. 64.

Fortsezung der Beispiele.

Erster Fall. $a , b = ab$; $3a . x . y = 3axy$; $3a . y . b = 3aby = 3bya = 3yba$; $4a . 3y = 4 . a . 3 . y = 3 . 4 . ay = 12\,ay$; $12\,ay . ry = 12\,aryy$ Daß die Multiplikation der Zahlen ordentlich geschehen muß, sieht man leicht, wenn man nur für die Buchstaben selbst gewisse bestimmte Zahlen sezt. Z. B. es sei $a = 8$; und $y = 10$, so ist $4a . 3y = 4 . 8 . 3 . 10 = 3 . 4 . 8 . 10 = 12 . 8 . 10 = 12\,ay$.

Zweiter Fall.

$$\begin{array}{l}
+a = +5 \\
+y = +4 \\
\hline
+ay = +20
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
+a = +5 \\
-y = -4 \\
\hline
-ay = -20
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
-a = -5 \\
+y = +4 \\
\hline
-ay = -20
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
-a = -5 \\
-y = -4 \\
\hline
+ay = +20
\end{array}$$

Dritt. Fall.

$$\begin{array}{llllll}
a + b - c \\
a - b - c \\
\hline
a^2 + ab - ac \\
\quad - ab & & -b^2 + bc \\
\qquad - ac & & -bc + c^2. \\
\hline
a^2 - 2ac - b^2 + c^2
\end{array}$$

oder

$$\begin{array}{l}
2a - 2x - r \\
a - 5x \\
\hline
2a^2 - 2ax - ar \\
\quad - 10ax \qquad + 10x^2 + 5xr \\
\hline
2a^2 - 12ax - ar + 10x^2 + 5xr.
\end{array}$$

Mul-

Multiplikation der Potenzen.

§. 65.

Wenn eine Zahl, oder Gröse mit sich selbst multiplicirt wird, so nennt man dieses Produkt das Quadrat, oder die zweite Potenz, und die Zahl, oder die Gröse, die mit sich selbst multiplicirt wird, heißt alsdann die Wurzel (radix) und ist die erste Potenz. So ist z. B. 9 das Quadrat von der Wurzel 3, oder $aa = a^2$ ist das Quadrat der Wurzel a.

§. 66.

Wenn das Quadrat wieder mit der Wurzel multiplicirt wird, so entsteht die Kubikzahl, oder die 3te Potenz der Wurzel. Z. B 9. $3 = 27$ ist die Kubikzahl der Wurzel 3, oder $aaa = a^3$ ist die Kubikzahl der Wurzel a.

§. 67.

Wird die Kubikzahl wieder mit der Wurzel multiplicirt, so entsteht die vierte Potenz. Die vierte Potenz aber mit der Wurzel multiplicirt giebt die fünfte Potenz u. s. w. Z. B. $aaaa = a^4$ ist die vierte Potenz von a, und $aaaaa = a^5$ ist die fünfte Potenz von a.

§. 68.

Es kan aber nicht nur ein jeder einzelne Buchstab, sondern auch ein jeder zusammengesezte Ausdruck, die Wurzel, oder die erste Potenz sein, und so zu höhern Potenzen erhoben

ben werden. Z. B. wenn ay die Wurzel ist: so ist die Kubikzahl, oder die 3te Potenz davon aaayyy $= a^3y^3$; oder es sei a + b die Wurzel (§. 63) aa + 2ab + bb $= a^2 + 2ab + b^2$ das Quadrat derselben.

§. 69.

Wenn gleich bei Potenzen ein Buchstab mehrmalen geschrieben werden soll, so pflegt man denselben doch nur einmal zu schreiben, und mit einer kleinen Zahl, welche rechter Hand oberhalb des Buchstabens gesezt, und der Exponent genannt wird, anzudeuten, wie oftmals der Buchstab hätte geschrieben werden müssen. Z. B. aaaaa wird geschrieben a^5, und gelesen a in der fünften Potenz; aayyy wird geschrieben a^2y^3 und gelesen a in der zweiten Potenz mal y in der dritten Potenz.

§. 70.

Eine jede Gröse für sich allein, oder in der ersten Potenz muß eigentlich nach dieser Art die Potenz auszudrücken, 1 zum Exponenten haben, das ist $a = a^1$. Der Exponent 1 aber wird nie, als zu besondern Absichten ausgedrückt.

§. 71.

Wenn aber endlich zusammengesezte Grösen zu Potenzen erhoben werden sollen, so muß man die ganze Wurzel erst in Klammern einschließen (§. 59. 61) und alsdann den Exponen-

ponenten eben so neben der Klammer sezen. Z. B. ary soll zur dritten Potenz erhoben werden, so schreibt man $(ary)^3$, oder $a + b$ quadrirt ist $(a + b)^2$.

§. 72.

Die Multiplikation der Potenzen fließt unmittelbar aus den allgemeinen Multiplikationsregeln der Buchstabenrechnung (§. 45. 46. 51. 52. 53. 56.) Bei Potenzen von einerlei Wurzel sieht man leicht, daß nur die Exponenten dürfen addirt werden §. 54). Denn

$$aa \,.\, aaaa = aaaaaa$$

also $a^2 \,.\, a^4 = a^6$

oder $b \,.\, bbb = bbbb$

also $b \,.\, b^3 = b^4$

oder $xxx \,.\, xxxx = xxxxxxx$

also $x^3 \,.\, x^4 = x^7$

§. 73.

Eben so verfährt man, wenn die Exponenten selbst allgemeine Ausdrücke sind. Z. B.

$$a^m \,.\, a^n = a^{m+n} \,;\; b \,.\, b^y = b^{y+1}$$

$$r^{a-1} \times r^{a+2} = r^{2a+1} \,;\; y^m \,.\, y^4 = y^{m+4} \,;$$

$$y^{m-1} \times y^{6-m} = y^5$$

§. 74.

Bei Potenzen von verschiednen Wurzeln werden die Ausdrücke schlechthin an einander gesezt (§. 52). Denn

$$xx \cdot yyy = xxyyy$$

Das ist, $x^2 \cdot y^3 = x^2y^3$
oder $a^m \cdot b^n = a^mb^n$

§. 75.

Eine jede Potenz kan endlich noch als eine erste Potenz, oder als eine Wurzel angesehen, und von neuem zu einer gewissen Potenz erhoben werden. In diesem Falle wird der Exponent der Wurzel, oder wenn die Wurzel ein Produkt aus mehreren Faktoren ist, alle Exponenten derselben mit dem Exponenten derjenigen Potenz, zu welcher man sie erheben soll, multiplicirt. Z. B. die Wurzel a^2 zur dritten Potenz gebracht giebt a^6; oder y^3 zur vierten Potenz erhoben, giebt y^{12}, oder a^2x^3 zur dritten Potenz gebracht a^6x^9. Denn

$$aa \cdot aa \cdot aa = aaaaaa = a^6$$

$$yy \cdot yy \cdot yy \cdot yy \cdot yy \cdot yy = yyyyyyyyyyyy = y^{12}$$

$$aaxxx \cdot aaxxx \cdot aaxxx = aaaaaaxxxxxxxxx = a^6x^9$$

So ist demnach auch allgemein a^m in der dritten Potenz $= a^{3m}$, oder b^y in der Po-

tenz

tenz n b^{ny}, oder x^a in der Potenz $b+1 = x^{ab+a}$, oder ax^m in der Potenz $n = a^n x^{mn}$ u. s. w.

§. 76.

Vermittelst der Multiplikation die Regeln zu finden, nach welchen die Wurzel aus einer Potenz zu ziehen?

$$
\begin{array}{r}
a+b \\
a+b \\
\hline
ab+b^2 \\
a^2+ab \quad \\
\hline
a^2+2ab+b^2 \\
a+b \\
\hline
a^2b+2ab^2+b^3 \\
a^3+2a^2b+ab^2 \quad \\
\hline
a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
a+b \\
\hline
a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\
a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3 \quad \\
\hline
a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4
\end{array}
$$

$a^2+2ab+b^2$ Regel zur Quadratwurzel, oder zweiten Potenz

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ Zur Kubikwurzel oder 3ten Potenz

$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ Zur Biquadratw. oder 4ten Potenz.

§. 77.

Beispiele zur Uebung

$1 = a^2 - 5ab + 7cd$
$- 5ac$?

$$2. = 3a^2 - 5bd + cf$$
$$- 5a^2 + 4bd + 8cf$$

$$3. = 5a^2b + ab^2 - bd^2 + 8fgh$$
$$9ab + 4f^2 - 15mn + 9cd$$

Division.

§. 78.

In der Division werden die Buchstaben, welche durch die Multiplikation verbunden sind, wieder getrennet, im Fall der Divisor einerlei mit einem, oder dem andern Faktor des Dividendus ist. Z. B. $\frac{ab}{a} = b$; denn a in a ist einmal enthalten, folglich kommt in dem Quotienten b; $\frac{abc}{bc} = a$; ag : a = g u. s. w. Sind aber Dividendus und Divisor ganz verschieden, so wird die Division entweder blos angezeigt, z. B. $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, g : a, oder es wird der Quotient, wie wir unten zeigen, in einer unendlichen Reihe von Brüchen durch Näherung gesucht, wenn der Divisor zusammen gesezt ist. Z. B.

$$\frac{a}{b+c} \text{ oder } \frac{a}{b-c}$$

§. 79.

Die Regeln dieser Art von Division sind also kürzlich diese: Sehet erstlich zu, wie vielmal die Buchstaben des Divisors im Dividendus enthalten sind, und sezet die Zahl und Buchstaben, so solches anzeigen, in die Stelle des Quotienten (§. 78); zweitens multipliciret und subtrahiret eben so, wie bei der Division mit den Zahlen. Endlich vergeßt nicht zu bemerken, daß einerlei Zeichen des Divisors und Dividendus +; verschiedne aber — geben (§. 58).

§. 80.

Es kommen also bei der Division der Buchstabenrechnung überhaupt zwei Fälle vor. Denn entweder ist die zu dividirende Gröse wirklich ein Produkt aus dem Divisor, als dem einen Faktor, und einem andern Faktor, welcher izt durch die Division zum Quotienten gefunden werden soll, oder nicht. Im lezten Falle kan eigentlich nicht dividirt werden, sondern es wird der Quotient nur dadurch angedeutet, daß die zu dividirende Gröse, und der Divisor mit dem Divisionszeichen hingesezt werden. Z. B. a dividirt durch b giebt zum Quotienten $\frac{a}{b}$ oder a : b ; oder c dividirt durch a — 1 giebt den Quotienten $\frac{c}{a-1}$, oder c : (a — 1). Die erste Art den Quotienten anzudeuten ist am bequemsten, und

ohne besondere Absichten bediene ich mich nie der andern. Zwar kan man auch in diesem Falle gewissermaßen auch wirklich dividiren (§. 78); aber diese Art der Division kommt erst weiter unten vor.

§. 81.

Was den zuerst erwähnten Fall (§. 80) anlangt, so wird zwar vielfältig der Quotient auf eben die Art nur ausgedrückt (§. 60. 61. 62) indessen kan auch wirklich dividirt, und der Quotient gesuchet werden. Bei dieser Division bedarf man aber keiner neuen Regel, sondern man multiplicirt und subtrahirt auch hier, wie bei der Division in Zahlen, und verfährt überhaupt genau nach eben den Gründen und Regeln. Auch kan man in Hinsicht der Zeichen aus der Buchstabenmultiplikation (§. 56. 57. 58) leicht wissen, welches Zeichen der Quotient in jedem Falle haben müsse.

§. 82.

Folgende Beispiele können zur weitern Erläuterung dienen.

I. B. $ab - ac + ad \mid b - c + d$

(a)

ab

$$
\begin{array}{l}
-ac+ad \\
\quad(a) \\
-ac \\
\hline
\qquad +ad \\
\qquad\quad (a) \\
\qquad\quad ad \\
\hline
\end{array}
$$

Hier ist der Divisor eine einzelne Gröse $= a$. Man dividire, wie bei den Zahlen nach unterwärts hin, und spreche a in ab ist bmal enthalten. Der Quotient bekommt b. Mit dem Quotienten wird der Divisor a multiplicirt, $a \cdot b = ab$. Dieses Produkt von dem Dividendus subtrahirt läßt zurück $-ac+ad$, die man herabsezt. Der Divisor wird, wie vorher, untergeschrieben. $+a$ in $-ac$ ist $-c$mal enthalten, weil verschiedne Zeichen $-$ geben (§. 79). Der Quotient bekommt also $-c$. Dieser Quotient mit dem Divisor multiplicirt; $-c \cdot +a$ giebt $-ac$, das Produkt vom Dividendus abgezogen läßt $+ad$ übrig. Der Divisor a wird wieder untergeschrieben; a in $+ad$ giebt $+d$ im Quotienten, weil die Zeichen einerlei sind (§. 79); $a \cdot d = ad$ vom Dividendus abgezogen läßt nichts übrig. Also hat man den Quotienten genau gefunden.

II. B. $aa - bb \mid a - b$

$$
\begin{array}{l}
(a + b) \\
aa + ab \\
- \quad - \\
\hline
\end{array}
$$

 $-ab$

— ab — bb
(a + b)
— ab — bb
+ +
―――――
0

Hier ist der Divisor keine einzelne Gröse. Es heißt also abermal, wie in der obigen Division a in aa ist enthalten amal; der Quotient bekommt a. Mit diesem Quotienten wird der ganze Divisor multiplicirt a . a = aa und + a . + b = + ab. Das Produkt aa + ab wird von dem Dividendus subtrahirt. Man verwechsle also die Zeichen nach §. 43. und addirt, aa + aa heben sich auf, — ab und — bb bleiben übrig. Diesen Rest dividiret weiter durch a + b; a + ab ist — bmal enthalten, — b . + a ist = — ab; — b . + b ist — bb. Dies Produkt, vom Dividendus abgezogen, geht auf, und läßt nichts übrig.

III. B. aad | a
(ad)
aad
―――
0

IV. B. bcfr | cf
(br)
bcfr
―――
0

V. B.

V. B. $a^2 - 2ab + b^2 \mid a - b$

$$
\begin{array}{l}
(a - b) \\
a^2 - ab \\
- \; + \\
\hline
- ab + b^2 \\
(a - b) \\
- ab + b^2 \\
+ \quad - \\
\hline
0
\end{array}
$$

VI. B. $aa - bb - 2ac + cc \mid a + b - c$

$$
\begin{array}{l}
(a - b - c) \\
aa - ab - ac \\
- \quad + \quad + \\
\hline
ab - bb - ac + cc \\
(a - b - c) \\
ab - bb - bc \\
- \quad + \quad + \\
\hline
- ac + bc + cc \\
(a - b - c) \\
ac + bc + cc \\
- \quad - \quad - \\
\hline
0
\end{array}
$$

a in aa ist enthalten amal. Der Quotient a wird mit dem ganzen Divisor multiplicirt, und giebt das Produkt aa — ab — ac. Dieses von dem Dividendus abgezogen, läßt, wenn die Zeichen verändert werden + ab — bb —

$ac + cc$; der Divisor wird abermal untergeschrieben; a in ab, $b$mal, der Quotient $+ b$ mit dem Divisor multiplicirt, giebt das Produkt $ab - bb - bc$, dies vom Dividendus subtrahirt, läßt $- ac + bc + cc$. Der Divisor noch einmal untergeschrieben, giebt den Quotienten $- c$. Das Produkt aus $- c$ in den Divisor vom Dividendus abgezogen läßt nichts.

VII. B.

$$a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 \mid a^2 + 2ax + x^2$$
$$(a + x)$$
$$a^3 + a^2x$$
$$- \quad -$$
$$\overline{\qquad 2a^2x + 3ax^2 + x^3}$$
$$(a + x)$$
$$2a^2x + 2ax^2$$
$$- \quad -$$
$$\overline{\qquad + ax^2 + x^3}$$
$$(a + x)$$
$$ax^2 + x^3$$
$$- \quad -$$
$$\overline{\qquad 0 \qquad}$$

VIII. B. $m^3 - n^3 \mid m^2 + mn + n^2$

$$(m - n)$$
$$m^3 - m^2n$$
$$- \quad +$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$

m^2n

$$
\begin{array}{l}
m^2n - n^3 \\
(m - n) \\
m^2n - mn^2 \\
- \quad + \\
\hline
mn^2 - n^3 \\
(m - n) \\
mn^2 - n^3 \\
- \quad + \\
\hline
0
\end{array}
$$

§. 83.

Ob aber gleich solche grose Exempel nicht leicht oft vorkommen, so muß man doch suchen, sich darin eine Fertigkeit zu erwerben. Denn man wird sich dadurch in den Stand sezen, überhaupt allerhand Ausdrücke, in alle die Faktoren zu zerlegen, aus deren Multiplikation sie können entstanden sein. Dieses ist in der Folge von groser Wichtigkeit. Ich werde daher ein paar Beispiele, und zwar solche, welche sehr häufig vorkommen, davon geben

$ax + x = (a + 1) . x$, $x^2 - ax = (x - a) . x$
$br - r = (b - 1) . r$, $a^2 - b^2 = (a + b) \times (a - b)$

§. 84.

Aus dem Bisherigen wird man also leicht verstehen, wie man eine einzelne Gröse durch einen zusammengesezten Divisor dividiren, und den Quotienten durch Näherung bekommen solle; eine Lehre, die besonders zu merken ist, weil sie uns in Summirung der Reihen zu stat-

ten kommt. Z. B. man solle 1 durch $1 - x$ dividiren.

$1 \quad | \; 1 + x + xx + xxx$ etc.

$(1 - x)$

$1 - x$

$- \quad +$

---

x

$(1 - x)$

$x - xx$

$- \quad +$

---

xx

$(1 - x)$

$xx - xxx$

$- \quad +$

---

xxx

Da es heißt, 1 in 1 ist enthalten 1mal. Der Quotient 1 multiplicirt in den Divisor $1 - x$ giebt das Produkt $1 - x$. Dies vom Dividendus abgezogen läßt $+ x$, wenn man die Zeichen verändert und addiret. Der Divisor wieder untergeschrieben giebt den Quotienten x. Denn 1 in x ist xmal enthalten. Der Quotient in den Divisor multiplicirt giebt $x - xx$. Dies vom Dividendus abgezogen, läßt $+ xx$, u. s. w.

Division der Potenzen.

§. 85.

Die Division der Potenzen von einerlei Wurzeln fließt unmittelbar aus der Multiplikation

tion derselben. Denn weil $a^3 . a^2 = a^5$ (§. 72), so muß nothwendig $a^5 : a^3 = a^2$ sein, oder weil $y^5 . y = y^6$ ist, so wird $y^6 : y^5 = y$ sein müssen.

§. 86.

Hieraus folgt die nachstehende allgemeine Regel für die Division der Potenzen: **Potenzen von einerlei Wurzeln werden dividirt, wenn man ihre Exponenten von einander subtrahirt.** Z. B.

$$y^4 : y^3 = y^{4-3} = y \; ; \; r^5 : r^2 = r^{5-2} = r^3$$ u. s. w.

§. 87.

Aber diese allgemeine Regel muß ferner alsdann auch noch gelten, wenn die Exponenten selbst Buchstaben sind. Z. B. $a^m : a^n = a^{m-n}$; $b^{a+1} : b^{a-1} = b^2$. u. s. w.

§. 88.

Ingleichen sieht man leicht, daß $a^4b^5 : ab^2 = a^3b^3$, und daß $a^3bx^5 : abx^2 = a^2x^3$ sei.

§. 89.

Also ist auch überhaupt $a^nb^m : a^1b = a^{n-1} b^{m-1}$, oder $a^yb^5x : a^{y-1}b^3 = ab^2x$, oder $a^yx^y : a^m = a^{y-m}x^y$ u. s. w.

§. 90.

Nicht weniger folgt aus dieser, als allgemein bewiesenen Regel (§. 86) daß es Potenzen mit negativen Exponenten geben könne. Z. B. $x^5 : x^7 = x^{-2}$; oder $a^3 : a^7 = a^{-4}$; $a^2x^5 : a^5x^2 = a^{-3}x^3$; oder $r^4x^3 : r^2x^7 = r^2x^{-4}$ u. s. w. Wie diese negativen Potenzen eigentlich zu erklären sind, und sich in andere gleiche Ausdrücke verändern lassen, läßt sich erst weiter unten zeigen.

§. 91.

Endlich ist nach dieser Regel (§. 86) $x^3 : x^3 = x^0$, oder $a^m : a^m = a^0$. Es ist aber x^3 in x^3, so wie a^m in a^m wirklich einmal enthalten, es ist daher x^0, so wie a^0, und eine jede Gröse in der Potenz $0 = 1$.

§. 92.

Wenn man bei Potenzen diejenige Gröse sucht, welche zu einer gewissen Potenz die Wurzel ist (§. 65. fgg.), so nennt man diese Handlung überhaupt die Ausziehung einer Wurzel.

§. 93.

Bei allgemeinen Ausdrücken ist die Wurzel derjenigen Potenz, welche durch den Exponenten angedeutet wird, die Gröse selbst, und also ohne Schwierigkeit zu finden. Z. B. die Wurzel der siebenten Potenz ist aus a^7, oder wie man kurz schreibt, $\sqrt[7]{a^7}$ ist $= a$, und

$\sqrt[m]{x^m} = x$ oder $\sqrt{a^2x^2} = ax$ und $\sqrt[n]{r^n y^n} = ry$. Ueber dem Wurzelzeichen ($\sqrt{\ }$) wird immer der Exponent der Wurzel gesezt, nur bei der Quadratwurzel läßt man den Exponenten weg. Man schreibt z. B. nicht $\sqrt[2]{a}$, sondern schlechthin $\sqrt{a}$.

§. 94.

Wenn aber aus einer gegebenen Potenz eine andere Wurzel, als der Exponent anzeigt, gezogen werden soll, so ist die Frage: wie wird alsdann diese Wurzel gefunden? In diesem Falle darf man nur den Exponenten der Potenz durch den Exponenten der Wurzel, die ausgezogen werden soll, dividiren. Z. B.

$$\sqrt[3]{a^{12}} = a^{\frac{12}{3}} = a^4 . \sqrt[4]{y^8} = y^{\frac{8}{4}} = y^2 .$$
$$\sqrt[2]{r^6} = r^{\frac{6}{2}} = r^3 .$$

Die Regel fließt wiederum unmittelbar aus der Erhebung gewisser Potenzen zu neuen Potenzen (§. 72). Nach derselben ist nämlich $(a^4)^3 = a^{12}$, oder $(y^2)^4 = y^8$, und $(r^3)^2 = r^6$; folglich muß wieder umgekehrt $\sqrt[3]{a^{12}} = a^4$, und $\sqrt[4]{y^8} = y^2$ und so weiter sein.

§. 95.

Nach dieser Regel verfährt man dann auch ferner, wenn gleich die Exponenten sich nicht so genau dividiren lassen, und also das Verfahren nicht so deutlich in die Augen leuchtet z. B.

$\sqrt{b^3}$

$\sqrt{b^3} = b^{\frac{3}{2}}$; $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[4]{a^5 x^7} = a^{\frac{5}{4}} x^{\frac{7}{4}}$

oder überhaupt $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$; $\sqrt[r]{a^{m+1}} = a^{\frac{m+1}{r}}$

$\sqrt[n]{x^m m} = x^{\frac{m}{n}} m^{\frac{1}{n}}$.

In allen diesen und ähnlichen Fällen werden demnach die Exponenten der Potenzen Brüche. Wie solche aber weiter verändert werden können, wird erst unten bei den Brüchen vorkommen.

Ausführliche Wiederholung der Division.

§. 96.

Eine Grösse durch eine andere dividiren heißt eben so viel, als eine dritte suchen, die mit der einen gegebenen multiplicirt ein Produkt erzeugt, welches der andern gegebenen gleich ist (Arithm. §. 7). Es kan also der Dividendus für ein Produkt des Divisors mit dem Quotienten angesehen werden.

§. 97.

Wenn also der Dividendus und der Divisor gleiche Zeichen haben, so muß der Quotient das Zeichen + erhalten (§. 48). Sind die Zeichen bei beiden einander entgegengesezt, so nimmt der Quotient das Zeichen — an (§. 48. 56. 58).

§. 98.

§. 98.

Erste Aufgabe.

Eine monomische rationale Gröse durch eine andere dieser Art zu dividiren?

Weil die Division trennt und aufhebt, was die Multiplikation verbindet und zusammensezt: so muß das Verfahren, nach welchem man einen Quotienten findet, demjenigen entgegengesezt sein, durch welches ein Produkt gefunden und angegeben wird (§. 96). Will man also die Aufgabe, wovon hier die Rede ist, auflösen, so schreibet erstlich das Zeichen, welches der Quotient haben soll, nach den obigen Regeln (§. 97); zweitens, wenn der Dividendus, oder der Divisor, oder beide zugleich Koefficienten haben, die keine Einheiten sind, so dividirt nach den gewöhnlichen Regeln der Arithmetik den Koefficienten des Dividendus durch den Koefficienten des Divisors (§. 79). Drittens lasset den Buchstaben, welchen der Divisor und Dividendus gemein haben, aus dem Quotienten weg (§. 82) und dann ist die durch ein solches Verfahren gefundene Gröse der Quotient. Z. B.

Der Quotient von $+ ab$ dividirt durch $+ a$ ist $= + b$; der Quotient von $- abh$ dividirt durch ab ist $= - h$; der Quotient von $- mnpq$ dividirt durch $- nq$ ist $= + mp$; der Quotient von $- 15ab^2$ dividirt durch $3ab$ ist $= - 5b$; der Quotient von $-$

35m-

$35mnpq$ dividirt durch $-7mn$ ist $= +5pq$.

Alle diese Verfahrungsarten sind bis zur Evidenz richtig. Denn multipl. man den Divisor durch den Quotienten, so kommt der Dividendus im Produkt wieder. Z. B.

$$\frac{35mnpq}{7mn} = 35mnpq : 7mn = 5pq \text{ und}$$

$$5pq \cdot 7mn = 35mnpq.$$

§. 99.

Haben der Dividendus und Divisor keinen Buchstaben mit einander gemein, oder ihre Koefficienten keine gemeinschaftliche Faktoren, so braucht man weiter nichts zu thun, als die Division blos anzuzeigen. Z. B. $a : b = \frac{a}{b}$;

$2a : 3b = \frac{2a}{3b}$ (§. 78).

§. 100.

Befinden sich, wie es manchmal geschieht, die Buchstaben, oder Grösen des Divisors nur zum Theil im Dividendus, so geschieht auch die Division nur diesem Theile nach, und liefert den übrigen Theil blos im Quotienten.

Z. B. $abcd : abh = \frac{abcd}{abh} = \frac{cd}{h}$

§. 101.

Ist im Dividendus und Divisor ein Buchstab mit verschiednen Exponenten vorhanden, so

so zieht man, um zu dividiren, die Gröse des einen Exponenten von der Gröse des andern ab (§. 85). z. B.

$$\frac{a^4}{a^2} = a^{4-2} = a^2 \text{ oder}$$

$$\frac{8a^5b^2}{4a^3b} = 2a^{5-3}b^{2-1} = 2a^2b; \text{ oder}$$

$$\frac{5a^7b^4c^2}{7a^6b^2c} = \frac{5a^{7-6}b^{4-2}c^{2-1}}{7} = \frac{5ab^2c}{7}$$

denn $\frac{a^4}{a^2}$ ist $= \frac{aaaa}{aa}$ und daraus wird in der Division a^2. Eben so ist $\frac{8a^5b^2}{4a^3b} = \frac{8aaaaabb}{4aaab}$ $= 2aab = 2a^2b$; woraus dann erhellet, daß $a^0 = 1$ ist, (§. 91). Denn $1 = \frac{a}{a} = \frac{a^1}{a^1} = a^{1-1}$ $= a^0$. Folglich gilt eine iede Gröse, die bis zur Potenz 0 erhoben worden ist, eben so viel, als 1 (§. 70). Denn dieser Ausdruk stellt allezeit den Quotienten einer Gröse vor, die durch sich selber dividirt wird; folglich muß der Quotient nothwendig 1 sein, weil die ganze Gröse sich selber nur einmal enthält, das ist, sich selber nur einmal gleich ist.

§. 102.

Wenn der Exponent eines Buchstabens im Dividendus kleiner ist, als der Exponent des nämlichen Buchstabens im Divisor, so erhält man einen negativen Rest, und zieht den zweiten

ten Exponenten vom ersten ab (§. 90). z. B. $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$; $\frac{7a^3b^2}{a^5b^3} = 7a^{3-5}b^{2-3} = 7a^{-2}b^{-1}$

§. 103.

Es ist nämlich evident, daß man in dem Falle, wenn man gleich anfänglich die gemeinschaftlichen Buchstaben des Dividendus und Divisors weggelassen hätte, würde erhalten haben, $\frac{a^2}{a^5} = \frac{1}{a^3} = \frac{a^0}{a^3} = a^{-3}$; und $\frac{7a^3b^2}{a^5b^3} = \frac{7}{a^2b} = \frac{7a^0b^0}{a^2b} = 7a^{-2}b^{-1}$, und dadurch lernt man nun die bestimmte Bedeutung der negativen Exponenten, die in der Algebra so oft vorkommen. Ein Buchstab, der einen negativen Exponenten hat, stellt einen Divisor vor, welcher dem Buchstaben, der den nämlichen Exponenten positive haben soll, gleich ist. Z. B. a^{-2} oder $1a^{-2}$ ist einerlei mit $\frac{1}{a^2}$; oder $4b^2a^{-5}$, ist einerlei mit $\frac{4b^2}{a^5}$

§. 104.

Zweite Aufgabe.

Eine polynome Gröse durch eine monome zu dividiren?

Vor allen Dingen bringe man den Dividendus in Ordnung, das ist, schreibet ihn so von

von der linken Hand nach der rechten, daß die Buchstaben und ihre Exponenten, wenn sie welche haben, nach einer nähern Aehnlichkeit mit dem Divisor aufgestellt werden. Gesezt wir sollten

$$a^2b^2 - 2a^3d + 4a^4 - 4abcd$$

dividiren durch $-2a^2$?

Zuerst ordne ich also den Dividendus nach dem Buchstaben a an, der im Dividendus und Divisor vorkommt. Dann stelle ich diese Buchstaben nach dem grösern und kleinern Werthe. Zulezt dividiret alle Theile des Dividendus durch den Divisor (§. 79), und schreibet jeden Quotienten nach dem Mase, worin ihr ihn findet, an seinen Ort hin. Die Summe aller besondern Quotienten liefert das Ganze des Quotienten.

Dem Dividendus des obigen Beispiels gebe ich also folgende Anordnung:

Dividendus.	Divisor.
$4a^4 - 2a^3d + a^2b^2 - 4abcd$	$2a^2$
	Quotient.
	$-2a^2 + ad - \frac{b^2}{2} + \frac{2bcd}{a}$

Denn

$4a^4 : -2a^2 = -2a^2$, und $-2a^2 . -2a^2 = +4a^4$;

$-2a^3d : -2a^2 = +ad$, und $ad . -2a^2 = 2a^{2+1}d = -2a^3d$. ferner

$+a^2b^2$

$+a^2b^2 : -2a^2 = -\frac{b^2}{2}$, und $-\frac{b^2}{2} \cdot -2a^2 = +2a^2b^2$; endlich

$-4abcd : -2a^2 = +\frac{2bcd}{a}$,

und $+\frac{2bcd}{a} \cdot -2a^2 = -4abcd$.

§. 105.

Dritte Aufgabe.

Eine polynome Grose durch eine andere polynome zu dividiren?

Erstes Beispiel.

Man soll $3ab^2 - 3a^2b + a^3 - b^3$ dividiren mit $-2ab + a^2 + b^2$? Ich ordne also zuerst den Dividendus, und den Divisor in Beziehung auf den Buchstaben a also an:

	Dividendus.	Divisor.
	$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$a^2 - 2ab + b^2$
	$+a^3 - 2a^2b + ab^2$	Quotient.
	$- \quad + \quad -$	$a - b$
1ter Rest	$-a^2b + 2ab^2 - b^3$	
	$-a^2b + 2ab^2 - b^3$	
	$+ \quad - \quad +$	
2ter Rest.	0	

Wir

Wir dividirten hier den ersten Theil des Dividendus durch den ersten Theil des Divisors. Beiden kommt das Zeichen + zu; also muß auch der Quotient das Zeichen + erhalten, dessen ausdrükliche Bezeichnung hier aber wegfällt. Dividire ich nun a^3 durch a^2, so bekomme ich den Buchstaben a zum Quotienten. Ich seze ihn also als den ersten Theil an seine Stelle. Nun multiplicire ich den ganzen Divisor mit a, das ist, $a^2 - 2ab + b^2$ mit a. Dieses Produkt vom Dividendus abgezogen (§. 43), erhalte ich den ersten Rest $= - a^2b + 2ab^2 - b^3$, und diesen Theil des Dividendus muß ich nun wieder durch den Divisor dividiren.

Also dividire ich nun den ersten Theil des Dividendus $- a^2b$ durch den ersten Theil des Divisors $+ a^2$, und dadurch bekomme ich den zweiten Theil des Quotienten $- b$. Nun wird der ganze Divisor durch b multiplicirt, und so erhalten wir das Produkt $- a^2b + 2ab^2 - b^3$. Da nun nach der Subtraktion desselben vom Dividendus weiter nichts übrig bleibt, so schliese ich daraus, daß der Quotient von der zusammengesezten Gröse $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, dividirt durch $a^2 - 2ab + b^2$ sei $a - b$.

Zweites Beispiel.

	Dividendus.	Divisor.
	$a^5 + b^5$	$a + b$
	$a^5 + a^4b$	
	$- \quad -$	Quotient.
erster Rest	$-a^4b + b^5$	$a^4 - a^3b$
	$-a^4b + a^3b^2$	$+ a^2b^2 - ab^3$
	$+ \quad -$	$+ b^4$
zweit. Rest	$a^3b^2 + b^5$	
	$a^3b^2 + a^2b^3$	
	$- \quad -$	
dritter Rest	$-a^2b^3 + b^5$	
	$a^2b^3 - ab^4$	
	$+$	
vierter Rest	$ab^4 + b^5$	
	$ab^4 + b^5$	
	$- \quad -$	
fünfter Rest	0	

Ich dividire, nachdem der Divisor und Dividendus in Beziehung auf den Buchstaben a geordnet worden sind, den ersten Theil des Dividendus $= a^5$ durch den ersten Theil des Divisors $= a$, und so erhalte ich den ersten Theil des Quotienten $= a^4$, den ich an seine gehörige Stelle schreibe. Nun multiplicire ich den Divisor $a + b$ durch a^4 und schreibe das Produkt mit entgegengesezten Zeichen unter den Dividendus, wo ich dann $- a^5 - a^4b$ bekomme. Subtrahire ich diese Grösse vom

vom Dividendus, so erhalte ich für den ersten Rest, oder für den zweiten Theil des in Beziehung auf a angeordneten Dividendus $-a^4b + b^5$.

Zweitens dividire ich den ersten Terminus $-a^4b$ durch den ersten Theil des Divisors $= a$, und dann erhalte ich den Quotienten $-a^3b$, welchen ich hinter den ersten schreibe. Nun multiplicire ich $a + b$ mit $-a^3b$, und schreibe das Produkt im entgegengesezten Zeichen unter den Dividendus; also $a^4b + a^3b^2$. Nun aber ist nach geschehener Reduktion der zweite Rest, oder der dritte Theil des Dividendus $= a^3b^2 + b^5$.

Drittens dividire ich den ersten Terminus im Dividendus $= a^3b^2$ durch a, und erhalte im Quotienten $+ a^2b^2$, welcher in seine Stelle geschrieben wird. Dann multiplicire ich den Divisor $a + b$ durch a^2b^2 und schreibe das Produkt mit entgegengesezten Zeichen unter den Dividendus. Es kommt aber $-a^3b^2 - a^2b^3$ heraus.

Viertens dividire ich $-a^2b^3$ durch a und es kommt $-ab^3$ für den vierten Theil des Quotienten. Nun multipliciret den Divisor $a + b$ durch $-ab^3$, und schreibet das Produkt mit entgegengesezten Zeichen unter den Dividendus in $+ a^2b^3 + ab^4$. Ist die Re-

duktion geschehen, so hat man im Reste ab^4 $+ b^5$, als den fünften Theil des Dividendus.

Endlich dividire ich ab^4 durch a und dann kommt b^4, als der fünfte Theil des Quotienten. Ich multiplicire den Divisor $a + b$ mit b^4 und schreibe das Produkt mit entgegengesezten Zeichen unter den Dividendus in $- ab^4$ $- b^5$. Alsdann behalte ich nach geschehener Reduktion 0 zum Reste, und daraus schliese ich, daß der wahre Quotient der Gröse a^5 $+ b^5$ dividirt durch $a + b$ ist $= a^4 - a^3b$ $+ a^2b^2 - ab^3 + b^4$.

§. 106.

Hat man aber auch gleich den Dividendus und den Divisor in Beziehung auf einen Buchstaben schon angeordnet (§. 104), so finden sich doch manchmal noch Ausdrücke, wo dieser Buchstab den nämlichen Exponenten hat. Alsdann reihe man diese Ausdrücke in eine vertikale Kolonne unter einander, und betrachte ihren Inbegriff, als ein Ganzes. Doch das hat auf den Quotienten keinen weitern Einfluß, dessen Theile sich immer nach der Regel ergeben. Z. B. $10a^3 + 11a^2b - 19abc - 15a^2c$ $+ 3ab^2 + 15bc^2 - 5b^2c$ soll ich dividiren durch $3ab + 5a^2 - 5bc$? Ich ordne also den Dividendus und Divisor in Beziehung auf den Buchstaben a an, und erhalte zum Dividendus $10a^3 + 11a^2b - 15a^2c - 19abc + 3ab^2$ $+ 15bc^2 - 5b^2c$; zum Divisor aber $5a^2$

$+ 3ab$

$+3ab - 5bc$. Allein da im Dividendus mehrere Ausdrücke vorkommen, welche a^2 enthalten, und noch zwei andere, die a haben, so ordne ich den Dividendus und Divisor, wie folget, an:

Dividendus.

$$\left\{\begin{array}{l} 10a^3 + 11a^2b - 19abc + 15bc^2 - 5b^2c \\ \quad - 15a^2c + 3ab^2 \end{array}\right.$$

$$D = +10^3 + 6a^2b - 10abc$$
$$\quad - \quad - \quad +$$

$$\text{E.R.}\ A = \left\{\begin{array}{l} + 5a^2b - 9abc + 15bc^2 - 5b^2c \\ - 15a^2c + 3ab^2 \end{array}\right.$$

$$E = + 5ab^2 + 3ab^2 \qquad + 5b^2c$$
$$\quad - \quad - \quad -$$

$$\text{Z.R.}\ B = - 15a^2c - 9abc + 15bc^2$$
$$F = - 15a^2c - 9abc - 15bc^2$$
$$\quad + \quad +$$

$$\text{D.R.} \quad C = 0$$

Divisor.

$$5a^2 + 3ab + 5bc$$

Quotient.

$$2a + b - 3c$$

Erstlich dividire ich $10a^3$ durch $5a^2$, und so erhält der Quotient im ersten Theile 2a. Multipliciret den Divisor durch 2a, und schreibet das Produkt D mit den entgegengesezten Zeichen unter den Dividendus. Nach der gehörigen Reduktion erhalte ich also den Rest A.

Zweitens dividire den Rest A, oder dessen ersten Ausdruk $5a^2b$ durch den ersten Theil des Divisors $= 5a^2$, und so erhalte ich den zweiten Theil des Quotienten in b. Nun schreibet das Produkt E mit den entgegengesezten Zeichen hin, so bleibt nach der Reduktion der Rest B.

Drittens dividire ich den Rest B, oder seinen ersten Terminus $- 15a^2c$ mit dem Divisor $5a^2$ und so bekomme ich den dritten Theil des Quotienten $= 3c$. Verfahre ich damit, wie gewöhnlich, so kommt zulezt der Rest C. Also ist die Division geendigt, und der Quotient ist nun berichtiget.

§. 107.

Anfänger thun wohl daran, wenn sie sich in der Division mit Buchstaben fleisig üben, und es bis zur Fertigkeit in diesem Verfahren bringen. Auf diesem Wege lernt man auch, die Grösen in ihre Faktores zerlegen, im Falle sie, ausser sich selber und der Einheit, anderer Faktoren fähig sind. Z. B. wenn man uns die Gröse $aa - bb$ giebt, so sieht jeder, wer nur ein wenig im Kalkulus geübt ist, ohne Mühe ein, daß sie aus den beiden Faktoren $a + b \cdot a - b$ enstanden ist, oder daß $aa - bb = (a + b) \times (a - b)$. Eben so sieht man, daß $m^2 + n^2 = (m + n\sqrt{-1})$

$\times$ (m

$\times (m - n\sqrt{-1})$; daß $aa + 2ab + bb = (a+b) \times (a+b) = (a+b)^2$. Dergleichen Zerlegungen, oder Verwandlungen kommen im algebraischen Kalkulus sehr oft vor.

§. 108.

Oft trägt es sich bei zusammengesezten Divisoren zu, daß die Division nicht völlig und ganz genau geschehen kan. Dividirt man z. B. $a^2 + 2ab + bb + c^2$ durch $a+b$, so ergiebt sich der Quotient $a+b$, und es bleibt c^2 übrig. Wollte man nun die Division dieses Restes durch den Divisor anzeigen, so wäre der Quotient im Ganzen $= a + b + \frac{c^2}{a+b}$. Will man aber im Quotienten lauter monome Grösen haben, welches bei unendlich vielen Gelegenheiten sehr vortheilhaft ist, so läßt sich der Quotient bis in eine unendliche Reihe entwiklen (§. 84), wie aus dem folgenden Beispiel kan ersehen werden:

Dividendus. c^2	Divisor. $a + b$
$- c^2 - \frac{c^2b}{a}$	Quotient.
Erster Rest $- \frac{c^2b}{a}$	$\frac{c^2}{a} - \frac{c^2b}{a^2} + \frac{c^2b^2}{a^3}$
$+ \frac{c^2b}{a} + \frac{c^2b^2}{a^2}$	$\frac{c^2b^3}{a^4} + \frac{c^2b^4}{a^5}$
Zw. R. $+ \frac{c^2b^2}{a^2}$	
$- \frac{c^2b^2}{a^2} - \frac{c^2b^3}{a^3}$	
Drit. R. $\frac{c^2b^3}{a^3}$	
$+ \frac{c^2b^3}{a^3} + \frac{c^2b^4}{a^4}$	
V. R. $+ \frac{c^2b^4}{a^4}$	
$- \frac{c^2b^4}{a^4} - \frac{c^2b^5}{a^5}$	
Fünfter Rest u. s. w.	

Erstlich dividire ich den Dividendus $= c^2$ durch den ersten Ausdruk des Divisors $= a$, oder ich zeige vielmehr diese Division blos an (§. 78), weil der Dividendus c^2 und der Divisor a keinen Buchstaben gemein haben. Der

Quo-

Quotient ist $\frac{c^2}{a}$. Ich schreibe ihn an seine Stelle, wohin er gehört. Ich multiplicire $a + b$ durch den Quotienten $\frac{c^2b}{a}$, und schreibe das Produkt mit entgegengesezten Zeichen unter den Dividendus. Also erhalte ich nach der Reduktion zum ersten Reste $-\frac{c^2b}{a}$ den zweiten Theil des Dividendus.

Zweitens dividiret diesen Dividendus durch den ersten Ausdruck des Divisors a, und ihr erhaltet $-\frac{c^2b}{a^2}$ zum zweiten Theil des Quotienten, den man hinter den erstern schreibt. Nun multipliciret den Divisor $a + b$ durch $-\frac{c^2b}{a^2}$, und schreibet das Produkt mit entgegengesezten Zeichen unter den Dividendus. Also erhaltet ihr, wenn die Reduktion geschehen ist, $+\frac{c^2b^2}{a^2}$ als den dritten Theil des Dividendus von $a+b$.

Und so fährt man immer weiter mit der Division fort, die dann, wie es in die Augen fällt, bis ins Unendliche fortgehen kan, da sie immer neue Ausdrücke für neue Theile des Divi-

Dividendus; folglich auch immer neue Quotienten liefert.

Es kan also nun das Ganze des Quotienten durch eine unendliche Reihe, wie folget, ausgedrückt werden:

$$\frac{c^2}{a} - \frac{c^2 b}{a^2} + \frac{c^2 b^2}{a^3} - \frac{c^2 b^3}{a^4} + \frac{c^2 b^4}{a^5} - \&c.$$

Da ein jeder Ausdruck dieser Reihe c^2 zu einem seiner Faktoren hat, so kan sie auch nach folgender Formel geschrieben werden:

$$c^2 \times \left(\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \&c.\right)$$

§. 109.

Man begreift sehr leicht, daß alle Ausdrücke in dieser Reihe sich immer in der Gröse vermindern werden, wenn $a > b$ ist; daß sie im Gegentheil zunehmen im Fall $a < b$ ist. Denn lassen sie uns nur einmal die beiden ersten Ausdrücke $\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}$ mit einander vergleichen und ihre Zeichen gar nicht in Anschlag bringen, oder in Gedanken annehmen, daß sie einerlei Zeichen hätten. Ist alsdann $a > b$, so muß auch $\frac{1}{a} > \frac{b}{a^2}$ sein. Denn da $a > b$, so darf man nur die beiden Glieder durch die

nämli-

nämliche Gröse a^2 dividiren, und wir werden offenbar $\frac{a}{a^2} > \frac{b}{a^2}$ oder $\frac{1}{a} > \frac{b}{a^2}$ erhalten. Hätte man im Gegentheil $a < b$, so fände man $\frac{1}{a} < \frac{b}{a^2}$.

Sezt man voraus $a > b$, so ist der zweite Ausdruck $\frac{b}{a^2}$ auch gröser, als der dritte $\frac{b^2}{a^3}$ und so wäre, vorausgesezt $a < b$, der zweite Ausdruck $\frac{b}{a^2}$ kleiner als der dritte $\frac{b^2}{a^3}$ u. s. w. Woraus wir dann im Allgemeinen den Schluß machen können, daß die Glieder und Ausdrücke der Reihe sich bis ins Unendliche entweder vermehren oder vermindern, je nachdem a gröser oder kleiner als b ist.

Diejenigen Reihen, worin die Glieder im Fortgehen immer weniger ausdrücken, nennt man konvergente Reihen; divergente hingegen diejenigen, wo die Glieder im Fortschreiten vergrösern.

Es kan aber eine solche Reihe mehr oder weniger schnell konvergiren oder divergiren, je gröser oder kleiner die Sprünge sind, wornach sich die Glieder entweder vermindern, oder vergrösern.

§. 110.

§. 110.

Konvergirt eine solche Reihe sehr schnell, so reicht es schon zu, daß man nur einige Ausdrücke oder Glieder von ihrem Anfange nimmt, um den Werth von der ganzen Reihe aufs Ohngefähre zu erhalten. Hat man z. B. nach §. 108. gefunden, daß der allgemeine Werth des angegebenen Quotienten $\frac{1}{a+b}$, durch die unendliche Reihe . . . . . $\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5}$ — &c. ausgedrückt werde, und $a = 100$, $b = 1$ sei, und nimmt dann nur blos die zwei ersten Glieder dieser Reihe, so erhält man $\frac{1}{100} - \frac{1}{10000}$ oder $\frac{99}{10000}$, wenn man die beiden Brüche unter einen Nenner bringt, und dann den zweiten von dem ersten subtrahirt. Nun ist aber der lezte Bruch nur um ein weniges von dem Bruche $\frac{1}{100+1}$ oder $\frac{1}{101}$ verschieden, und dieser macht den ganzen Werth der Reihe aus. Denn bringt man die beiden Brüche $\frac{1}{101}$ und $\frac{99}{10000}$ unter einerlei Nenner, um sie desto leichter mit einander zu vergleichen, so erhalten wir statt

statt ihrer im Verhältnisse $\frac{10000}{1010000}$ und $\frac{9999}{1010000}$, woraus dann erhellet, daß ihr Unterschied kaum merklich ist.

Man würde sich nach und nach dem ganzen Werthe der Reihe immer mehr nähern, wenn man die drei ersten Glieder zusammen nähme, oder die vier ersten Glieder u. s. w.

Dagegen ist es auch klar, daß man sich bei einer divergenten Reihe immer mehr und mehr von dem wahren Werth entfernt, je mehr Glieder von dem Anfange an zusammen genommen werden. Will man also aufs Ohngefähr den ganzen Werth einer solchen unendlichen Reihe ausdrücken, so muß sie eine konvergente Reihe sein, und je geschwinder sie konvergirt, je weniger Glieder braucht man vom Anfange an zu nehmen, um sie in ihrer Näherung vorzustellen.

§. III.

Der Ausdruck $\frac{1}{a+b}$ kan auf eine zwiefache Weise in einer unendlichen Reihe entwickelt werden, je nachdem man a oder b, als den ersten Ausdruck des Divisors betrachtet. Im ersten Falle ist die unendliche Reihe:

(A)

$$(A)\ \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \&c.$$

Im andern hingegen kommt die unendliche Reihe:

$$(B)\ \frac{1}{b} - \frac{a}{b^2} + \frac{a^2}{b^3} - \frac{a^3}{b^4} + \frac{a^4}{b^5} - \&c.$$

Wenn nun $a > b$, dann ist die Reihe (A) konvergent, und die Reihe (B) divergent, und umgekehrt die Reihe (A) divergent, und die Reihe (B) konvergent, wenn $a < b$. Ist also $a > b$, so muß man sich der Reihe (A) bedienen, um den Quotienten $\frac{1}{a+b}$ anzugeben, und ist $a < b$, so drückt man durch die Reihe (B) den nämlichen Quotienten aus.

§. 112.

Wäre $a = b$, so würden beide Reihen eine wie die andere werden:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a} - \frac{1}{2} + \&c.$$

Da nun in dieser Reihe jeder Ausdruck durch den folgenden wieder zerstört wird, so scheint daraus zu folgen, daß der ganze Werth der Reihe gleich 0 ist, da doch dieser Werth in der That $\frac{1}{2a}$ oder $\frac{1}{2b}$ sein muß. Allein man vergesse nicht zu bemerken, daß

daß die Reihe in diesem Falle nicht konvergent ist, und will man von diesen Ausdrücken einen gebrauchen, um damit die Grösse $\frac{1}{2a}$ zu bezeichnen, so muß man unvermeidlich diesen Ausdrücken auch noch den Rest der Division, dividirt durch den Divisor, beifügen.

Steht man z. B. in der Reihe beim zweiten Ausdrucke $-\frac{1}{a}$ still, so müßte man zu der Summe $\frac{1}{a}-\frac{1}{a}$ der beiden ersten Ausdrücke, weil man sie findet, wenn 1 durch $a+a$ dividirt wird (§. 108), den Quotienten des zweiten Restes der Division 1, dividirt durch $a+a$, das ist, $\frac{1}{2a}$ hinzufügen, und so erhielte man $\frac{1}{a}-\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}$, das ist, $\frac{1}{2a}$ zum Werth von $\frac{1}{2a}$, wie es sein muß.

Stünde man aber in der Reihe beim dritten Ausdrucke $+\frac{1}{a}$ still: so müßte man zu der Summe der drei ersten Ausdrücke, welche aus der Division entstehen, den Quotienten des dritten Restes -1, dividirt durch $2a$,

das ist $- \frac{1}{2a}$ hinzufügen, und alsdann be=
käme man $\frac{1}{a} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a} - \frac{1}{2a}$,
das ist, $\frac{1}{2a}$ für den Werth von $\frac{1}{2a}$ u. s. w.

Division der Wurzelgrösen.

§. 113.

Erste Aufgabe.

Eine rationale Monome durch eine radikal Monome; oder eine radikal Monome durch eine rationale Monome zu dividiren?

In diesem Falle zeigt man nur die Division an. Sind aber Koefficienten da, die nicht 1 sind, oder gehen vor der Wurzelgröse rationale Grösen vorher, so geht die Division nach den obigen Regeln vor sich.

Wir sollen z. B. $+ a$ dividiren durch $+ \sqrt{b}$, so erhält man im Quotienten $+ \frac{a}{\sqrt{b}}$
oder $+ \frac{a}{b^{\frac{1}{2}}}$;

Dividirt man $- 8a\sqrt{c}$ durch $+ 2ab$, so liefert der Quotient $- \frac{4\sqrt{c}}{b}$ oder $- \frac{4c^{\frac{1}{2}}}{b}$.

Aber

Aber die Manier zu schreiben, wie wir sie hier angeben, ist nicht so allgemein, daß sie nothwendig immer vorkommen müßte, das ist, man muß den Quotienten nicht immer in der Form eines Bruchs angeben. Oft schreibt man auch den Divisor auf die Seite des Dividendus, und giebt dem Divisor einen negativen Exponenten. So ist der Ausdruck

$+\frac{a}{b^{\frac{1}{2}}}$ = dem Ausdrucke $+ab^{-\frac{1}{2}}$; der

Ausdruck $-\frac{4c^{\frac{1}{2}}}{b}$ = dem Ausdrucke $-4c^{\frac{1}{2}}b^{-1}$.

In dieser Rücksicht behandelt man aber Grösen, welche Brüche zu Exponenten haben, eben so wie die andern, wo die Exponenten ganze Zahlen sind (§. 102).

§. 114.

Zweite Aufgabe.

Eine radikal Monome durch eine andere radikal Monome zu dividiren?

Hier sind zwei Fälle möglich, die man unterscheiden muß; einmal der, wo die beiden Wurzelgrösen von einerlei Art sind; zum andern der, wo die Wurzelgrösen zu verschiedenen Arten gehören.

Erster Fall.

Lassen Sie uns unterstellen, der Dividendus und der Divisor wären gleichnamige Wurzelgrösen: so schreibe man erstlich das Zeichen hin, welches vor dem Quotienten hergehen soll; zweitens das Wurzelzeichen, so der Dividendus und Divisor gemeinschaftlich haben, und hinter dasselbe den Quotienten der dividirten Gröse eben so, als wenn sie gar nichts Wurzelartiges hätten. Die Division der Koefficienten und der rationalen Grösen, welche vor den Wurzelgrösen vorhergehen können, geschiebt nach den gewöhnlichen Regeln. Soll man z. B. $+\sqrt{a^2b^2}$ durch $-\sqrt{a}$ dividiren, so erhält man zum Quotienten $-\sqrt{ab^2}$, oder $-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{2}}$, oder wenn man den Exponentialbruch von b auf den einfachsten Ausdruck zurückführet, $-a^{\frac{1}{2}}b$. Soll man z. B. $-8a^2\sqrt[3]{10m^2n^2}$ durch $+4a\sqrt[3]{5mn}$ dividiren, so bekommt man zum Quotienten $2a\sqrt[3]{2mn}$ oder $-2a \times 2^{\frac{1}{3}}m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}$, oder $-2^{\frac{4}{3}}am^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}$.

Den Grund von dieser Regel wird man sich leicht geben können, wenn man bedenken will, daß die Division ein umgekehrtes Verfahren der Multiplikation ist, und daß das Produkt des Divisors durch den Quotienten eine Gröse herausbringen muß, welche dem Divi-

Dividendus gleich ist. Dividirt man z. B. $-\sqrt{a}$ durch $+\sqrt{b}$, so erhält man zum Quotienten $-\sqrt{\frac{a}{b}}$. Denn multiplicirt man diese lezte Gröse durch $+\sqrt{b}$, so kommt $-\sqrt{\frac{ab}{b}}$ oder $-\sqrt{a}$ heraus, welches der vorgegebene Dividendus ist. Und so verhält es sich in den andern ähnlichen Fällen.

Zweiter Fall.

Sind der Dividendus und Divisor nicht gleichnamige Wurzelgrösen, so kan man sie unter einen Namen bringen, und dann ist dieser Fall der nämliche, wie der vorhergehende. Man soll z. B. dividiren $-\sqrt[3]{a^3b^2}$ durch $+\sqrt[2]{a}$. Alsdann führe ich die beiden Wurzelgrösen auf einen Namen zurück, und dann wird die erste $= -\sqrt[6]{a^6b^4}$, oder $-a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{4}{6}}$; die zweite $+\sqrt[6]{a^3}$ oder $+a^{\frac{3}{6}}$. Dividire ich nun die erste durch die zweite: so ist der Quotient $-\sqrt[6]{a^3b^4}$ oder $-a^{\frac{3}{6}}b^{\frac{4}{6}}$, oder $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}$.

§. 115.

Dritte Aufgabe.

Polynomen zu dividiren, wenn sich Wurzelgrösen darunter befinden?

Die Auflösung dieser Aufgabe hängt unmittelbar von der vorhergehenden ab. Z. B. $a^3b^2 - 7a^2b^3 + 7abc\sqrt{m^2np} - 5a^2b^2\sqrt[3]{a^2c} + 35ab^3\sqrt[3]{a^2c} - 35bc\sqrt[6]{m^6n^3p^3a^4c^2}$ durch $ab - 5b\sqrt[3]{a^2c}$ zu dividiren?

Hier verfährt man, wie gewöhnlich und dividirt nach und nach die verschiednen Theile des Dividendus durch den ersten Ausdruck des Divisors, und nimmt davon bei einer jeden partialen Division das Produkt ab, welches aus dem partiellen Quotienten multiplicirt mit dem ganzen Divisor entsteht. In Rücksicht auf die Wurzelgrösen kommen bei der Multiplikation, oder Division keine Schwierigkeiten vor, weil das Verfahren in allen Theilen es mit Monomen zu thun hat, die also weiter keine Regeln erfordern, als die wir oben für dergleichen Grösen gegeben haben.

Unter dieser Voraussezung wird man also finden, daß der verlangte Quotient ist $= a^2b - 7ab^2 + 7c\sqrt{m^2np}$.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Bergsträsser, Johann Andreas Benignus, 1732-1812

Die Elementar-Algebra eine Ergänzung der Arithmetik des seel. Ernesti

Frankfurt am Main 1789

Math.p. 30
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081438-2
VD18 15293823